

Mémoires présentés par
divers savans à l'Académie
royale des sciences de
l'Institut de France, et
imprimés par son ordre [...]

Académie des sciences (France). Auteur du texte. Mémoires présentés par divers savans à l'Académie royale des sciences de l'Institut de France, et imprimés par son ordre : sciences mathématiques et physiques. 1908.

1/ Les contenus accessibles sur le site Gallica sont pour la plupart des reproductions numériques d'oeuvres tombées dans le domaine public provenant des collections de la BnF. Leur réutilisation s'inscrit dans le cadre de la loi n°78-753 du 17 juillet 1978 :

- La réutilisation non commerciale de ces contenus est libre et gratuite dans le respect de la législation en vigueur et notamment du maintien de la mention de source.
- La réutilisation commerciale de ces contenus est payante et fait l'objet d'une licence. Est entendue par réutilisation commerciale la revente de contenus sous forme de produits élaborés ou de fourniture de service.

[CLIQUER ICI POUR ACCÉDER AUX TARIFS ET À LA LICENCE](#)

2/ Les contenus de Gallica sont la propriété de la BnF au sens de l'article L.2112-1 du code général de la propriété des personnes publiques.

3/ Quelques contenus sont soumis à un régime de réutilisation particulier. Il s'agit :

- des reproductions de documents protégés par un droit d'auteur appartenant à un tiers. Ces documents ne peuvent être réutilisés, sauf dans le cadre de la copie privée, sans l'autorisation préalable du titulaire des droits.
- des reproductions de documents conservés dans les bibliothèques ou autres institutions partenaires. Ceux-ci sont signalés par la mention Source gallica.BnF.fr / Bibliothèque municipale de ... (ou autre partenaire). L'utilisateur est invité à s'informer auprès de ces bibliothèques de leurs conditions de réutilisation.

4/ Gallica constitue une base de données, dont la BnF est le producteur, protégée au sens des articles L341-1 et suivants du code de la propriété intellectuelle.

5/ Les présentes conditions d'utilisation des contenus de Gallica sont régies par la loi française. En cas de réutilisation prévue dans un autre pays, il appartient à chaque utilisateur de vérifier la conformité de son projet avec le droit de ce pays.

6/ L'utilisateur s'engage à respecter les présentes conditions d'utilisation ainsi que la législation en vigueur, notamment en matière de propriété intellectuelle. En cas de non respect de ces dispositions, il est notamment passible d'une amende prévue par la loi du 17 juillet 1978.

7/ Pour obtenir un document de Gallica en haute définition, contacter utilisation.commerciale@bnf.fr.

M É M O I R E S

PRÉSENTÉS PAR DIVERS SAVANTS

À L'ACADÉMIE DES SCIENCES

DE L'INSTITUT NATIONAL DE FRANCE.

TOME XXXIII. — N° 3.

M É M O I R E SUR L'ELLIPTICITÉ DU GÉOÏDE DANS LE TUNNEL DU SIMPLON,

PAR

M. BRILLOUIN.

INTRODUCTION.

M. R. Eötvös, professeur à l'Université de Buda-Pest, a publié en 1896, dans les *Annales de Wiedemann* (t. LIX, p. 354), un important mémoire sur la mesure des courbures du Géoïde, résumant des travaux poursuivis depuis huit années et communiqués brièvement à l'Académie de Buda-Pest, à diverses dates. Cette mesure, toute locale, est obtenue au moyen d'une balance de Cavendish transportable, avec laquelle M. Eötvös a réussi à opérer d'abord dans des caves, puis au laboratoire, et enfin en pleine campagne, à l'abri d'une simple tente par temps calme.

J'eus dès lors le désir de construire un appareil analogue, en y adaptant un mode de lecture des angles très sensible que j'avais étudié en 1880 à Dijon, et perfectionnant la protection contre les

trépidations, dans l'espoir de rendre l'appareil plus maniable et d'un usage plus rapide. L'occasion s'en présenta en 1899, à la suite de conversations avec mon beau-frère, M. Marcel Bertrand, sur les divers procédés à essayer pour déterminer l'emplacement des minerais de pyrite. Les pyrites, dont la densité est presque double de celle du terrain environnant, se présentent en masses compactes allongées horizontalement à une faible profondeur; quand ces masses ne sont pas énormes, comme celles de Rio-Tinto, on les épuise en quelques années, et il faut en chercher d'autres. Le sous-sol de la province de Huelva (Espagne) en est pour ainsi dire pavé, mais très irrégulièrement, et il serait utile d'avoir un moyen de reconnaître le lieu exact et l'importance approximative de chaque loupe de pyrite dont divers indices font soupçonner la présence. Jusqu'ici on n'a d'autre moyen que de forer un puits et, s'il rencontre de la pyrite, de circonscrire la masse au moyen de galeries; mais le puits peut passer à quelques mètres de la pyrite sans la rencontrer; c'est un procédé assez long et coûteux. Il me sembla que ces masses localisées devaient modifier suffisamment les courbures du géoïde dans leur voisinage immédiat pour être reconnaissables par les appareils de M. Eötvös, surtout si je réussissais à les alléger et à en rendre l'emploi plus rapide. Mon beau-frère me mit en relations avec M. Teraud, directeur de la Société française des mines de Huelva, qui fit, avec quelques amis, les frais de construction de l'appareil et des essais à faire sur place. Après une année d'études au laboratoire, je me transportai à Valdelamusa pour ces essais. Le transport révéla la nécessité d'améliorer les procédés d'emballage pour éviter la rupture du fil de torsion pendant la manipulation des caisses, mais des observations purent être faites, sous la tente, en un certain nombre de points et montrèrent le bon fonctionnement de l'appareil. Toutefois, au point de vue particulier de la recherche des gisements, le résultat du voyage était plutôt décevant. L'extrême irrégularité du relief du sol dans la plupart des régions intéressantes à explorer produit à elle seule des irrégularités de courbure du géoïde bien plus grandes que

celles que peuvent produire les masses de pyrite du sous-sol; dans une région lentement ondulée, l'allure seule du relief, sans nivellement précis, comparée aux résultats des mesures en un certain nombre de points peu éloignés, permettrait de reconnaître facilement les excès de masse sous-jacents; mais il en est autrement dès que des changements de niveau même faibles (quelques dizaines de mètres) sont irrégulièrement répartis dans une étendue comparable ou inférieure à celle dans laquelle l'excès de masse sous-jacent produit un effet sensible. Un nivellement soigné devient nécessaire pour un calcul précis de l'effet dû au relief du sol, et la discussion devient beaucoup plus délicate.

Modifié dans un certain nombre de détails au cours de l'année 1900-1901, l'appareil reste un appareil de géodésie; ce n'est pas un appareil rustique dont on puisse confier l'emploi à un ingénieur quelconque. Le nivellement et les calculs consécutifs exigeraient un nombre d'heures de travail considérable de la part d'un topographe auxiliaire, parce que le rayon d'action des accidents de terrain est très étendu. La prolongation, pourtant prévue, de cette période d'essais et la nécessité d'organiser ensuite un service de prospection décidèrent M. Taraud et ses amis à s'arrêter dans cette voie après avoir réglé toutes les dépenses et m'avoir généreusement indemnisé de mon travail. C'est ainsi que je me suis trouvé, en 1901, en possession d'un appareil, encore imparfait sans doute, mais satisfaisant dans l'ensemble et facilement transportable par trois hommes. Je n'ai pas cessé depuis lors d'en améliorer les détails. Je l'ai transporté au sommet du Puy-de-Dôme en juin 1903, sans accident, et j'ai pu l'employer dans de bonnes conditions sous la tente, même par des vents très violents. Plus récemment, lorsque j'appris par M. Guillaume que le tunnel du Simplon serait livré pendant cinq jours au travail des géodésiens, j'étais assez sûr du bon fonctionnement de mon appareil pour désirer faire des mesures tout le long du tunnel; les négociations de M. Guillaume avec la commission géodésique suisse aboutirent heureusement et pendant que celle-ci poursuivait sa mesure de longueur à une

extrémité du tunnel, je pus faire des mesures à l'autre, et *vice versa*, à mon entière satisfaction ⁽¹⁾.

Après les diverses et multiples modifications de détail qu'il a subies au cours de ces six années, l'appareil n'a plus l'homogénéité que je lui avais donnée au début; il y reste quelques pièces devenues inutiles; en revanche certaines dispositions simples ont dû être sacrifiées pour améliorer la protection thermique. Enfin, je suis convaincu que je pourrais réduire considérablement les dimensions, et surtout le poids, si je faisais construire un nouveau modèle; mais il faut encore améliorer la protection thermique avant d'entreprendre cette dépense considérable, et tirer bon parti de l'appareil déjà très maniable tel qu'il est.

⁽¹⁾ J'ai plaisir à adresser ici mes remerciements à l'Académie des sciences, qui m'a remboursé les dépenses effectuées dans ce voyage.

CHAPITRE PREMIER.

MÉTHODES ET APPAREILS DE M. EÖTVÖS.

Dans son mémoire de 1896, ainsi que dans son rapport au Congrès de physique⁽¹⁾, en 1900, M. Eötvös a clairement expliqué comment on peut déterminer toutes les dérivées secondes du potentiel de la pesanteur.

Soit

$$(I) \quad U = 6,7 \cdot 10^{-8} \sum \frac{m}{r} + \frac{\omega^2 R^2}{2} \quad (C. G. S.)$$

ce potentiel en un point M dont la distance à l'axe de la terre est R, et dont la distance aux masses m est r .

Prenons pour axes Mx , My deux horizontales dirigées vers le Nord et vers l'Ouest, et la verticale Mz dirigée vers le bas.

On a

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial z} = g$$

au point M, origine des coordonnées, par définition même de la verticale et de l'intensité de la pesanteur. Il y a six dérivées secondes dont trois liées par l'équation de Laplace

$$(II) \quad \Delta U = 2\omega^2 - 4\pi \cdot 6,7 \cdot 10^{-8} \cdot \rho,$$

en appelant ω la vitesse de rotation de la terre, parce que les axes tournent avec cette même vitesse ω ; ρ est la densité des masses

⁽¹⁾ *Rapports au Congrès de Physique*, t. III, p. 371. Paris, Gauthier-Villars.

attirantes réelles au point x, y, z . Il ne reste donc que cinq dérivées secondes distinctes. L'une d'elles

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = \frac{\partial g}{\partial z}$$

se mesure par la méthode des pesées d'une même masse pendue au même plateau d'une balance par un fil court, puis par un fil long de 5 à 10 mètres. La différence des pesées reste extrêmement petite et les mesures sont très délicates.

De là résulte, hors des masses attirantes,

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 2\omega^2 - \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}.$$

Les quatre autres dérivées sont prises une ou deux fois par rapport à une direction horizontale; elles indiquent donc la variation d'une force horizontale, soit quand on se déplace horizontalement, soit quand on se déplace verticalement. A ce titre elles sont mesurables par une balance de Coulomb.

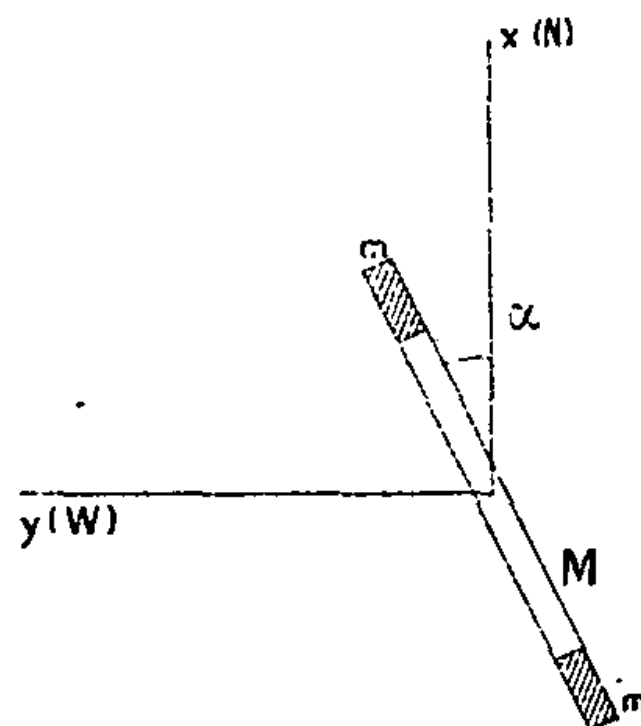


Fig. 1.

Considérons d'abord une tige horizontale de longueur $2l$ chargée de deux masses égales m à ses deux extrémités et suspendue par un fil de torsion. Soit α l'angle que fait sa direction avec la direction S.-N., vers la gauche; au point $l \cos \alpha$, $l \sin \alpha$, qu'occupe la

masse m , les composantes de la pesanteur projetées sur l'horizon du point de suspension sont

$$\begin{aligned} X &= 0 + l \cos \alpha \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + l \sin \alpha \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}; \\ Y &= 0 + l \cos \alpha \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + l \sin \alpha \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}. \end{aligned}$$

Elles produisent autour du fil de suspension un couple

$$m[Yx - Xy] = ml^2 \left\{ \begin{aligned} &\sin \alpha \cos \alpha \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right) \\ &+ (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \end{aligned} \right\}$$

et, sur la deuxième masse, un couple égal; ce couple peut être mesuré par le changement qu'il produit dans la durée d'oscillation, comme l'a fait d'abord M. Eötvös, ou, plus simplement, par la torsion m du fil de suspension, pourvu que le zéro de celui-ci soit bien fixe.

Si la seconde masse n'est pas au même niveau que la première, il faut ajouter dans l' X et l' Y correspondants un terme

$$+ h \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z}; \quad + h \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z},$$

en appelant h la distance verticale de la deuxième masse au-dessous de la première. Les deux autres coordonnées sont

$$-l' \cos \alpha \quad \text{et} \quad -l' \sin \alpha.$$

L'équation d'équilibre de la balance de torsion est alors

$$\begin{aligned} \text{(III)} \quad &(ml^2 + m'l'^2) \left[\frac{\sin 2\alpha}{2} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right) + \cos 2\alpha \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \right] \\ &- m'l'h \left[\cos \alpha \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} - \sin \alpha \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} \right] \\ &+ C\theta = 0, \end{aligned}$$

en appelant C le couple de torsion du fil et θ l'angle dont le fil est tordu dans le sens des α croissants lorsque le balancier est dans l'azimut α .

Il est facile de mettre en évidence la signification géométrique des dérivées qui figurent dans cette équation.

Soient R_1 , R_2 les rayons de courbure principaux de la surface de niveau qui passe par le point de suspension, et soit α_1 l'azimut du rayon R_1 ; on a

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} &= -g \left(\frac{\cos^2 \alpha_1}{R_1} + \frac{\sin^2 \alpha_1}{R_2} \right), \\ \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} &= -g \left(\frac{\sin^2 \alpha_1}{R_1} + \frac{\cos^2 \alpha_1}{R_2} \right), \\ \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} &= -g \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \frac{\sin 2\alpha_1}{2}.\end{aligned}$$

La première ligne de l'expression du couple équivaut donc à

$$+ (ml^2 + m'l'^2) g \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \frac{\sin 2(\alpha - \alpha_1)}{2}.$$

Ce couple est proportionnel à la différence des courbures principales du géoïde; il est nul quand le balancier est dans un quelconque des deux plans de courbure principaux; il est maximum à 45 degrés de ces plans de courbure et ramène le balancier vers le plan du plus grand rayon de courbure.

Soit α_0 l'azimut suivant lequel la pesanteur augmente le plus rapidement, et s une longueur comptée dans cette direction; on a, évidemment,

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} = \frac{\partial g}{\partial x} = \cos \alpha_0 \frac{\partial g}{\partial s}, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} = \frac{\partial g}{\partial y} = \sin \alpha_0 \frac{\partial g}{\partial s};$$

La seconde ligne de l'expression du couple est

$$+ m'l'h \sin(\alpha - \alpha_0) \frac{\partial g}{\partial s}.$$

Ce couple est proportionnel à $\frac{\partial g}{\partial s}$; il est nul quand le balancier est orienté dans la direction α_0 , de plus rapide variation, maximum à angle droit; il ramène la masse inférieure vers la direction suivant laquelle la pesanteur augmente le plus vite. On contrôle immédiatement ce signe, en se rappelant que l'existence du potentiel se traduit par la relation

$$\frac{\partial g}{\partial s} = \frac{\partial S}{\partial z},$$

où on appelle S la projection sur l'arc s de la pesanteur en un point voisin du point de suspension.

On montre d'ailleurs facilement que $\frac{\partial g}{g \partial s}$ est la courbure de la ligne de force, c'est-à-dire de la verticale, du point de suspension.

Nous pouvons donc écrire l'équation de l'équilibre de torsion sous la forme suivante

$$(IV) \quad \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \sin 2(\alpha - \alpha_1) + \eta \frac{\partial g}{g \partial s} \sin(\alpha - \alpha_0) + D\theta = 0,$$

en posant

$$\eta = \frac{2m'l'h}{ml^2 + m'l'^2};$$

$$D = \frac{2C}{(ml^2 + m'l'^2)g}.$$

La première de ces deux constantes est un nombre facile à déterminer avec précision par les mesures effectuées sur l'appareil pendant sa construction. On peut la rendre nulle en suspendant les deux masses au même niveau; on isole ainsi le premier terme; mais on ne voit pas immédiatement sous cette forme la possibilité de mesurer le second terme indépendamment du premier. Cela est pourtant facile comme nous le verrons plus loin (chap. II).

La seconde constante est l'inverse d'une longueur facile aussi à déterminer, car le facteur $\frac{C}{ml^2 + m'l'^2}$ est égal à $\frac{4\pi^2}{T_0^2}$, en appelant T_0

la période d'oscillation libre du balancier soustrait à toute action autre que celle de la torsion; on a donc

$$D = \frac{8\pi^2}{gT_0^2}.$$

Pour mesurer T_0 exactement, il faut éviter toute action de la pesanteur sur les oscillations du balancier, ce qu'on obtient en orientant le balancier dans la direction où la déviation θ est maximum ou minimum, car le couple dû à la pesanteur est alors indépendant de l'angle, et l'oscillation de très petite amplitude se fait sous l'influence de la torsion seule.

En somme, la sensibilité dépend uniquement de la période.

Supposons donc connus η et D ; si l'on mesure 4 déviations $\theta', \theta'', \theta''', \theta''''$ dans 4 azimuts différents $\alpha', \alpha'', \alpha''', \alpha''''$, les quatre équations d'équilibre pourront être résolues par rapport aux quatre inconnues $\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}, \alpha_1, \frac{\partial g}{\partial s}, \alpha_0$, dont elles feront connaître les valeurs numériques au point où l'on observe. Les azimuts les plus favorables sont distants de 45 degrés à partir d'une origine arbitraire, qu'il faut savoir repérer par rapport au méridien géographique, ou magnétique quand la déclinaison est connue.

Cette balance de torsion doit donc être mobile tout entière autour d'un axe vertical, et ces changements d'azimut général ne doivent pas modifier le zéro de torsion du fil par rapport à toute la cage de l'appareil. Dans le transport et les changements d'azimuts, il est impossible de traiter le fil avec les mêmes ménagements que celui d'une balance de Cavendish fixe; néanmoins, M. Eötvös a obtenu un zéro suffisamment invariable par l'emploi de fils de platine conservés sous charge constante au laboratoire pendant plusieurs années consécutives. Il est nécessaire aussi d'éviter tout courant d'air intérieur à la boîte de l'appareil et, par conséquent, toute inégalité de température interne; pour cela, le balancier est enfermé dans une première boîte de laiton de 3 ou 4 millimètres d'épaisseur, entourée elle-même à 1 centimètre de distance par une seconde

boîte de même épaisseur. Cette seule précaution a suffi à M. Eötvös pour opérer même en pleine campagne, abrité par une tente, soit la nuit, soit par les journées couvertes.

Il est facile de fixer l'ordre de grandeur des coefficients du premier membre de l'équation dus à la forme générale de la terre.

Le rayon moyen de la terre est de $6,36 \cdot 10^8$ centimètres, et l'aplatissement est $\frac{1}{300}$ environ. $\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}$ est donc de l'ordre de

$$-\frac{1}{300} \frac{1}{6,4 \cdot 10^8} \quad \text{ou} \quad -5 \cdot 10^{-12}.$$

La pesanteur varie de $\frac{1}{200}$ environ entre l'équateur et le pôle, pour un arc de 10^9 centimètres; elle est d'ailleurs stationnaire au pôle et à l'équateur; sa variation maximum est donc à peu près double de sa variation moyenne, et $\frac{\partial g}{\partial s}$ est de l'ordre de $10 \cdot 10^{-12}$.

L'ellipsoïde de Bessel donne, d'après M. Eötvös, pour Buda-Pest ($47^\circ,5$ de latitude),

$$\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} = 4,999 \cdot 10^{-12}, \quad \frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial s} = 8,292 \cdot 10^{-12},$$

avec

$$\alpha_0 = 0 \quad \text{et} \quad \alpha_1 = 0;$$

le rayon de courbure méridien est le plus petit.

La constante D est de l'ordre de $0,08 T_0^{-2}$; en prenant pour T_0 environ 1,000 secondes, D sera de l'ordre de $8 \cdot 10^{-8}$, et les déviations maximum, de l'ordre de $\pm 6,25 \cdot 10^{-5}$ ou $\pm 12,5$ secondes d'arc; c'est à peu près la limite de ce qu'on peut lire sûrement, par les procédés de réflexion d'usage courant dans les laboratoires de physique, sans atteindre un encombrement excessif.

A supposer qu'on pût trouver une région assez exempte de grosses perturbations locales pour permettre une mesure de l'ellipticité du globe, uniforme dans une étendue de quelques kilomètres

carrés, on voit que, pour obtenir à coup sûr le millième sur l'aplatissement, il faudrait faire une installation permanente, multiplier la sensibilité par 10, en employant de larges lunettes installées à demeure à 5 ou 6 mètres de l'appareil, et encore par 100, en décuplant la période, qui atteindrait 10^4 secondes ou 2 heures et demie environ. M. Eötvös a atteint cette sensibilité dans une partie de ses expériences; mais ce n'est pas dans cette direction que les résultats sont les plus intéressants. Les influences locales sont partout considérables, et après avoir corrigé, s'il est nécessaire, de l'action des masses artificielles (murailles, caves, terrassements, etc.), il reste une influence du relief topographique et de la distribution des masses en profondeur, qui atteint ou dépasse fréquemment cent fois ce qui provient de l'ellipsoïde.

Ce qu'il est facile d'atteindre et très difficile d'éliminer, par la méthode d'étude de M. Eötvös, ce sont les vides et les plis du géoïde tel qu'il est; *en un mot, la méthode est particulièrement appropriée à l'étude topographique du géoïde, tel qu'il résulte de la topographie et de la géologie du terrain réel.*

A ce titre l'appareil transportable est de beaucoup le plus intéressant.

L'un des appareils de M. Eötvös est formé d'une tige creuse horizontale pendue à un fil de torsion⁽¹⁾. Cette tige de laiton de

⁽¹⁾ Cet appareil figurait à l'Exposition universelle de Paris, 1900, dans la section hongroise. Après la fin de l'exposition (alors que j'avais déjà transporté mon appareil en Espagne), M. Eötvös a laissé cet appareil à ma disposition pendant quelques semaines au laboratoire de l'École normale. La construction de l'appareil est simple et robuste et son usage est commode, mais il est assez lourd et encombrant, surtout à cause de la masse suspendue à l'extrémité du levier qui est protégée par un double tube de laiton de 60 centimètres de longueur situé à 20 centimètres de l'axe de rota-

tion. La boîte qui enferme le tout porte un bras métallique rigide quoique léger, au bout duquel se trouve une lunette et une échelle divisée sur ivoire. Les divisions sont de 0 millim. 5, la distance est de 67 centimètres; chaque division vaut donc sensiblement 90 secondes; on en apprécie bien le dixième, soit 9 secondes. La glace protectrice, encadrée dans le tube qui supporte le fil de torsion, est argentée sur la moitié de sa hauteur; c'est la distance entre l'image qu'elle fournit et celle due au miroir lié au balancier qui fait connaître les différences de torsion suivant l'azimut.

40 centimètres de longueur est chargée à une extrémité d'un cylindre de platine (30 grammes) enfoncé dans le tube et se termine à l'autre extrémité par un crochet duquel pend un deuxième cylindre de platine (25 gr. 5) au bout d'un fil de 55 centimètres de longueur. Ce balancier est suspendu à un fil de torsion en platine ⁽¹⁾ de 0 millim. 04 de diamètre et de 60 centimètres de longueur, dont le coefficient de torsion est 0,3 C. G. S. par mètre, soit 0,5 C. G. S. pour 60 centimètres. La période d'une oscillation est 1,522 secondes, un peu plus de 25 minutes. Il faut environ 30 minutes avant qu'on puisse commencer les lectures; il faut lire ensuite quatre amplitudes successives pour définir la position d'équilibre, ce qui prend environ 40 minutes. Il faut donc environ 1 heure 10 minutes pour chaque azimut. La position d'équilibre est atteinte au bout de 2 heures environ.

Avec cet appareil, quatre mesures de 45 degrés en 45 degrés sont indépendantes et ne fournissent aucun contrôle; on effectue une cinquième mesure à 180 degrés de la première, qui doit être identique à la première si le zéro de torsion du fil n'a pas changé, ou qui permet de corriger de son mouvement si la différence est assez petite.

Une station exige donc 6 heures de travail, plus le temps de l'installation. Vers 1900, M. Eötvös avait l'habitude d'installer l'appareil en place dans la matinée, de lui laisser prendre sa température et d'observer la nuit, soit une observation en 24 heures, donnant les *quatre* dérivées secondes en une station.

Une division de l'échelle donne un produit $D\theta$ égal à $14 \cdot 10^{-12}$ (C. G. S.) dans l'équation IV, soit environ $14 \cdot 10^{-9}$ pour la différence des deux dérivées secondes $\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$ suivant les directions des courbures principales, et $5,6 \cdot 10^{-9}$ (C. G. S.) pour la dérivée horizontale $\frac{\partial^2 U}{\partial s \partial z}$ ou $\frac{\partial g}{\partial s}$.

⁽¹⁾ Les fils de quartz ont paru trop fragiles pour un instrument transportable.

L'ellipsoïde de Bessel donnerait à la latitude de Buda-Pest ($47^{\circ}5$) ± 0 div. 3 pour l'ellipticité $\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}$, et ± 1 div. 4 pour le gradient de pesanteur $\frac{\partial g}{\partial s}$, avec cet appareil.

M. Eötvös a construit des appareils de laboratoire d'une sensibilité incomparablement plus grande, obtenue en compensant la torsion du fil par l'attraction de masses extérieures, ce qui permet d'atteindre l'instabilité, comme on sait, d'après une ancienne remarque de Coulomb sur l'emploi de sa balance à la mesure des *attractions* électriques. Mais pour toute cette partie des travaux de M. Eötvös, je renvoie le lecteur à son beau mémoire de 1896 et à son rapport de 1900.

CHAPITRE II.

APPAREILS NOUVEAUX.

La forme simple de l'appareil transportable de M. Eötvös se prête particulièrement bien à un étalonnement théorique; on peut toutefois être conduit à adopter une forme plus compliquée pour diverses raisons.

Supposons donc qu'il y ait des masses en dehors du plan vertical d'azimut α . Soient

$$l \cos \alpha - \lambda \sin \alpha, \quad l \sin \alpha + \lambda \cos \alpha, \quad z,$$

les coordonnées d'une masse dm ; le couple total est

$$\begin{aligned} & \cos 2\alpha \left[\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \int (l^2 - \lambda^2) dm + \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right) \int l \lambda dm \right] \\ & + \frac{\sin 2\alpha}{2} \left[\left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right) \int (l^2 - \lambda^2) dm - \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \int l \lambda dm \right] \\ & + \cos \alpha \left[\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} \int z l dm - \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} \int z \lambda dm \right] \\ & - \sin \alpha \left[\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} \int z l dm + \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} \int z \lambda dm \right]. \end{aligned}$$

Cette expression complète se simplifie si le balancier a un plan de symétrie vertical, qu'il est alors naturel de prendre pour définir son azimut α ; on a alors

$$\int l \lambda dm = 0, \quad \int z \lambda dm = 0,$$

et il reste seulement

$$\begin{aligned} & \left[\cos 2\alpha \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + \frac{\sin 2\alpha}{2} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right) \right] \int (l^2 - \lambda^2) dm \\ & + \left[\cos \alpha \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} - \sin \alpha \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} \right] \int z l dm. \end{aligned}$$

La seconde ligne disparaît lorsqu'il y a un plan de symétrie horizontal; on peut facilement isoler la première ligne seule, c'est-à-dire le couple qui dépend de l'ellipticité du géoïde. C'est ce qui était déjà évident sur la forme plus simple du chapitre I et ce qu'a en effet réalisé M. Eötvös dans certains de ses instruments.

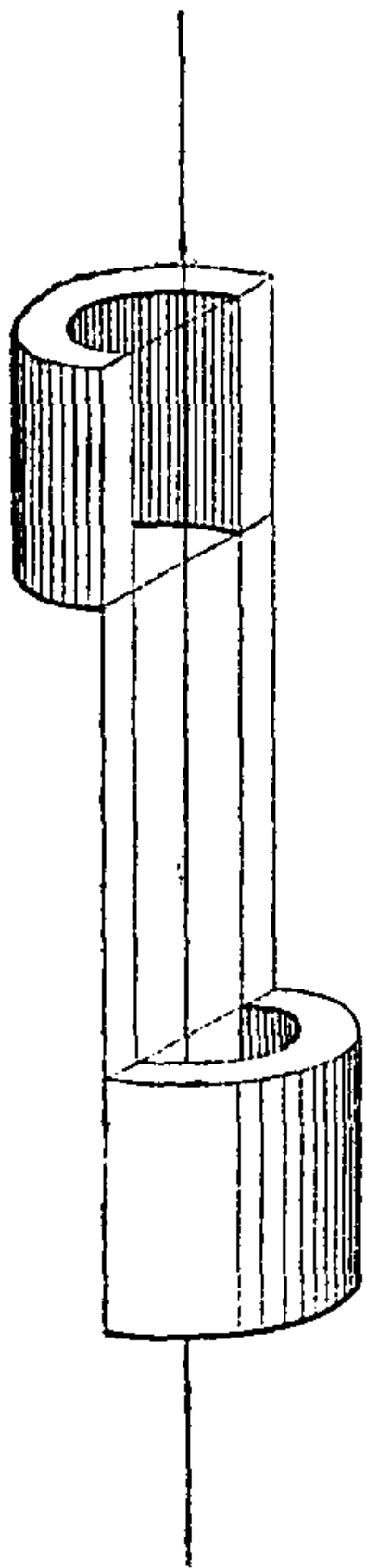


Fig. 2.

Projet d'appareil pour le gradient horizontal de la pesanteur. — Mais on peut aussi isoler la seconde ligne seule si l'on a

$$\int (l^2 - \lambda^2) dm = 0 \quad \text{et} \quad \int z l dm = 0.$$

Rien n'est plus facile à réaliser; supposons par exemple qu'on coupe un anneau cylindrique d'axe vertical par un plan diamétral vertical et qu'on fasse glisser l'une des moitiés le long de ses génératrices d'une hauteur h (fig. 2).

La première relation était satisfaite pour le cylindre primitif, isotrope autour de l'axe vertical, et la translation suivant les génératrices n'y change rien. Le nouveau corps a un plan de symétrie vertical perpendiculaire à la section de glissement, qui doit servir de repère; les centres de gravité des demi-cylindres sont dans ce plan à une distance horizontale $2L$ l'un de l'autre, et l'on a

$$\int z l dm = MLh,$$

en appelant M la masse totale du cylindre.

On a d'ailleurs

$$L = \frac{4}{3\pi} \frac{a^3 - b^3}{a^2 - b^2},$$

en appelant a et b les rayons extérieur et intérieur du cylindre.

Le moment d'inertie autour de l'axe vertical est égal à

$$\frac{M}{2} \frac{a^4 - b^4}{a^2 - b^2},$$

ce qui permet, en négligeant comme plus haut les petites pièces accessoires de liaison, de donner à l'équation d'équilibre la forme simple

$$(V) \quad \frac{\partial g}{\partial s} \sin(\alpha - \alpha_0) = \frac{3\pi}{8} \frac{a+b}{h} \frac{a^2 + b^2}{a^2 + ab + b^2} \cdot \frac{4\pi^2}{T_0^2} \theta,$$

où n'interviennent encore que des mesures géométriques très simples et la durée d'oscillation libre T_0 .

On peut imaginer d'autres modes de construction avec quatre masses suspendues aux sommets d'un carré horizontal, deux contiguës par des fils très courts, les deux autres par de longs fils égaux, ou deux barres horizontales égales et parallèles à des niveaux différents, etc.

Ayant fait cette remarque, il me sembla qu'il y aurait avantage au point de vue de la construction, de la facilité des calculs et des contrôles à séparer les deux appareils au lieu de les réunir en un seul, et je me décidai à étudier d'abord l'appareil aux courbures du géoïde, moins encombrant à cause de l'horizontalité du levier, me réservant de construire l'autre lorsque j'aurais obtenu de bons résultats du premier. Le moment serait venu certainement, mais j'ai reculé jusqu'à présent devant la dépense.

Appareil nouveau pour l'ellipticité du géoïde. — Revenons donc à l'appareil qui mesure la différence des courbures du géoïde isolément. Les trois conditions

$$\int z \lambda \, dm = 0, \quad \int l \lambda \, dm = 0, \quad \int z l \, dm = 0,$$

sont facilement réalisées à la fois, si le balancier mobile a deux plans de symétrie verticaux rectangulaires.

l et λ sont les distances de la masse dm à ces deux plans.

$$I = \int (l^2 + \lambda^2) dm$$

est le moment d'inertie autour de l'axe de suspension; mais

$$\int (l^2 - \lambda^2) dm = \int l^2 dm - \int \lambda^2 dm$$

est la différence des moments d'inertie par rapport à ces deux plans; il faut en déterminer le rapport au moment d'inertie total I pour étalonner l'appareil, car l'équation de torsion est

$$\cos 2\alpha \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + \frac{\sin 2\alpha}{2} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right) = \frac{4\pi^2}{T_0^2} \frac{I}{\int (l^2 - \lambda^2) dm} \theta.$$

Il importe d'ailleurs dans la construction de ramasser le plus possible les masses dans un seul plan vertical pour conserver la sensibilité sans exagérer la durée d'oscillation et, par suite, la longueur des mesures.

Détermination du rapport des moments d'inertie. Correction d'inertie transverse. — Lorsque la construction géométrique s'y prête, on peut déterminer ce rapport en mesurant les dimensions des diverses parties du balancier et en les pesant.

On peut aussi le déterminer par des expériences d'oscillation; on a, en effet,

$$\int l^2 dm - \int \lambda^2 dm = \int (l^2 + \zeta^2) dm - \int (\lambda^2 + \zeta^2) dm,$$

en appelant ζ la distance verticale de la masse dm à un point A choisi arbitrairement de l'axe vertical. Les deux termes sont alors les moments d'inertie du levier par rapport à deux axes horizon-

taux passant par le point A et situés dans les plans de symétrie. Si l'on choisit en particulier le centre de gravité et si on fait osciller le levier autour des trois axes rectangulaires ainsi définis sous l'influence d'un même couple fourni par un fil de torsion ou par un bifilaire, on obtient trois équations

$$\frac{\int(l^2 + \zeta^2) dm}{\tau_1^2} = \frac{\int(\lambda^2 + \zeta^2) dm}{\tau_2^2} = \frac{\int(l^2 + \lambda^2) dm}{\tau^2} = \frac{C_1}{4\pi^2},$$

d'où l'on tire

$$\frac{\int(l^2 + \lambda^2) dm}{\int(l^2 - \lambda^2) dm} = \frac{\tau^2}{\tau_1^2 - \tau_2^2}.$$

L'expérience est un peu délicate, par les réglages qu'elle exige dans les trois positions.

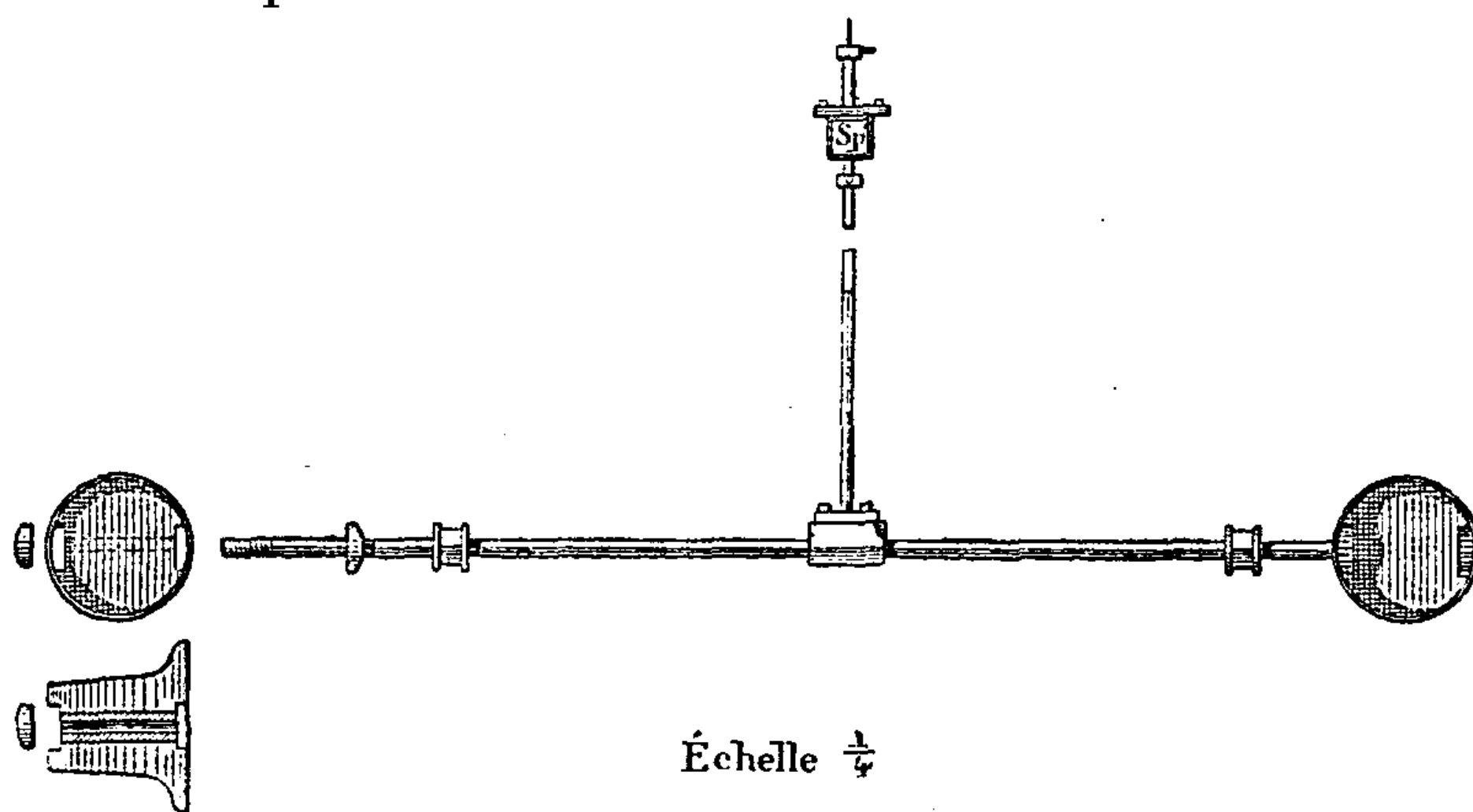


Fig. 3.

L'évaluation est encore plus simple avec un balancier démontable comme le mien (fig. 3). Les seules pièces pour lesquelles λ ne soit pas très petit sont les disques munis de cylindres horizontaux; ces pièces s'enfilent sur la tige, prenant leur position exacte grâce à une goupille, et sont maintenues par un écrou. On peut les enlever sans difficulté et mesurer leurs trois moments d'inertie; mesurer aussi le moment d'inertie de la tige avec les écrous sans

les disques et enfin du balancier complet, autour du fil de suspension. Pour ces expériences, on emploie un ruban de torsion court et rigide, étalonné à l'aide d'un corps de moment d'inertie connu. J'ai trouvé ainsi, pour chacun des disques extrêmes,

$$\int l^2 dm = 94,0, \quad \int \lambda^2 dm = 26,5, \quad \int \zeta^2 dm = 100,0,$$

et pour le balancier entier sans les disques

$$\int (l^2 + \lambda^2) dm = 5370,$$

et avec les disques

$$\int (l^2 + \lambda^2) dm = 37750,$$

dont la différence est 32380.

D'ailleurs, le calcul donne pour le moment dû aux disques (masse 76 grammes; distance du centre géométrique à l'axe 14 cm. 57; distance du centre de gravité à l'axe 14,57 — ε)

$$\begin{aligned} & 2 \times [76 \times (14,57 - \varepsilon)^2 + 94 + 26,5] \\ &= 32640 - 4429 \varepsilon + 11552 \varepsilon^2, \end{aligned}$$

qui conduirait à un peu moins de 38010 pour le total⁽¹⁾.

$\int \lambda^2 dm$ est de l'ordre de $2 \times 26,5 = 53$ pour le terme le plus important; tout le reste du balancier ne pèse pas 50 grammes, est à une distance λ inférieure à 0 centim. 2, et donne par conséquent moins de 2 unités. Le moment d'inertie transverse est inférieur à 55 sur un total de 38000. Dans la mesure de courbure, il faut donc réduire la sensibilité apparente dans le rapport

$$\frac{1}{I} \int (l^2 - \lambda^2) dm = \left(1 - 2 \cdot \frac{55}{38000} \right) = [1 - 0,0029].$$

⁽¹⁾ Le centre de gravité des disques avec leur enveloppe cylindrique est en effet un peu plus près de l'axe de suspension que leur centre géométrique,

à cause de l'excès de longueur intérieure du cylindre amortisseur; un écart ε de 0 centim. 06 établirait la concordance complète.

Aucune de ces déterminations absolues de moments d'inertie n'intervient dans l'étalonnage final, mais seulement ce coefficient de réduction (0,0029) de la sensibilité déduite de la période d'oscillation libre. On voit que, grâce à l'étude séparée des pièces qui ont un moment d'inertie transverse, cette correction est très facile à déterminer avec précision.

On peut alors choisir la forme du balancier par des considérations étrangères à l'étalonnage. Ce qui paraît le plus important, c'est de favoriser l'amortissement rapide des oscillations, de manière à rendre les lectures rapides dans chaque azimut et à permettre le changement d'azimut à bref délai. C'est ce que j'ai obtenu en donnant au balancier la forme représentée sur la figure. La théorie en sera développée au chapitre IV.

Le ruban de torsion. — L'élément le plus important et le plus délicat de l'appareil est le fil de torsion. M. Eötvös a obtenu un zéro suffisamment fixe en employant des fils de platine conservés au laboratoire sous tension égale au poids du balancier depuis plusieurs années; il n'a pas employé les fils de quartz à cause de leur fragilité.

Après quelques essais, la même raison m'a fait aussi y renoncer; mais il s'y en est joint quelques autres. D'abord, la pratique montre, et les travaux de MM. Threlfall et Pollock sur la mesure de la pesanteur par la torsion d'un fil de quartz horizontal confirment, qu'il est extrêmement difficile de faire deux fils de quartz fins ayant, même grossièrement, la même sensibilité, d'où un changement de constante considérable des appareils après chaque rupture. Ensuite, le fil de quartz a nécessairement une section circulaire, d'où une faible force portante. Or on sait depuis plus de cinquante ans, par les travaux de M. de Saint-Venant⁽¹⁾, que la forme circulaire correspond au coefficient de torsion maximum (et non minimum,

⁽¹⁾ DE SAINT-VENANT, *Mémoire sur la torsion des prismes*. (Sav. Étr., 1855.)
— BRILLOUIN, *C. R.*, 1885, t. C, p. 739.

comme on le croyait auparavant) pour une aire donnée et que le coefficient de torsion d'un ruban plat est sensiblement en raison inverse du moment d'inertie de l'aire (et non proportionnel). On peut donc réduire autant qu'on veut le coefficient de torsion d'un fil malléable, en l'aplatissant, sans diminuer sa force portante et par conséquent sa solidité.

Quelques essais sommaires pour obtenir un fil de quartz plat sont restés sans succès; il me semble pourtant possible d'y réussir en le laminant vers 500 degrés ou 600 degrés. Le fil de quartz serait porté à cette même température, par immersion dans un bain liquide, d'où il sortirait pour passer immédiatement entre les rouleaux chauds d'un laminoir et se refroidir rapidement à l'air avant que la capillarité ait eu le temps de l'arrondir à nouveau. C'est là un montage délicat et coûteux que je n'ai pas entrepris, mais qui me paraît susceptible de réussir et qui étendrait considérablement le domaine d'emploi des fils de quartz.

Je me suis donc décidé à employer des fils métalliques, comme M. Eötvös, mais sous forme de rubans minces. J'ai essayé des fils de platine, de bronze phosphoreux et de platine iridié,

Le bronze phosphoreux de 0 millim. 09 de diamètre a commencé à s'allonger sous une charge de 170 grammes et à filer pour se rompre sous une charge de 190 grammes.

Le fil de platine de 0 millim. 10 ne s'est rompu que sous une charge de 350 grammes sans filer.

Un fil de platine iridié à 20 p. 100, fourni par la maison Poulenc, a porté sans se rompre 2,500 grammes sous une section de 0 millim. 2 de diamètre, soit plus de 800 grammes sous 0 millim. 1 de diamètre.

D'ailleurs les coefficients de torsion par mètre de longueur sous 0 millim. 1 de diamètre ont été trouvés, par oscillations d'un barreau carré, respectivement 6,2 — 4,6 — 6,1 qui diffèrent peu. La ténacité du fil de platine iridié lui donne un avantage marqué.

Il est facile de fixer l'épaisseur à laquelle il convient de laminier le fil pour obtenir un coefficient de torsion donné.

Le coefficient géométrique c est, en effet, pour la circonférence,

$$\frac{1}{2} \pi R^4 = \frac{R^2}{2} S;$$

pour l'ellipse,

$$\frac{\pi a^3 b^3}{a^2 + b^2} = \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} S;$$

pour le ruban très plat,

$$\frac{16}{3} a e^3 = \frac{4 e^3}{3} S,$$

en appelant $2e$ l'épaisseur et $2a$ la largeur.

Le rapport diminue constamment, mais d'abord très lentement, à mesure qu'on aplatit le fil, et devient à la fin

$$\frac{c_-}{c_0} = \frac{8 e^2 S_-}{3 R^2 S_0},$$

en appelant S_- la section aplatie par le laminage. Le rapport des sections avant et après laminage peut varier d'un métal à l'autre sans s'écarter beaucoup de 1 pour les métaux durs. J'ai donc admis pour choisir l'épaisseur en vue du couple à obtenir

$$\frac{c_-}{c_0} = \frac{8 e^2}{3 R^2}.$$

Le fil de platine iridié à 20 p. 100 a été étiré par Gaiffe à 0 millim. 1 de diamètre et laminé par Pellin sous deux épaisseurs $2e$, d'environ 0 millim. 034 et 0 millim. 027, qui doivent réduire les coefficients de torsion à $\frac{8}{3}(0,34)^2$ et $\frac{8}{3}(0,27)^2$ si la formule finale est applicable; soit $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{5}$ environ. C'est le premier fil que j'ai employé. Il pèse alors 182 milligrammes par mètre; son épaisseur est 34^μ et sa largeur 0 millim. 25.

La longueur de ruban utile dans mon appareil est 35 centimètres;

il donne au balancier une période de 559 secondes, très facile à mesurer en enlevant de l'intérieur de l'appareil les cylindres fixes amortisseurs et refermant. Comme le moment d'inertie est sensiblement 38000 (C. G. S.), on voit que le couple dû au fil est 4,8 (C. G. S.) et rapporté à 1 mètre de longueur 1,7, ce qui est bien de l'ordre de grandeur prévu.

Cette valeur ne sert d'ailleurs nullement pour étalonner l'appareil, mais seulement pour en fixer approximativement les dimensions principales.

Avec cette valeur de la période

$$T_0 = 559^s$$

et le coefficient de réduction de la sensibilité mesuré plus haut

$$\frac{\int (l^2 - \lambda^2) dm}{I} = 1 - 0,0029,$$

l'équation fondamentale de l'appareil est en C. G. S., l'angle θ étant mesuré en radians,

$$\cos 2\alpha \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + \frac{\sin 2\alpha}{2} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right) = \frac{4\pi^2}{(559)^2} (1,0029) \theta.$$

Le coefficient de θ est $1,2666 \cdot 10^{-4}$.

Si on mesure θ en secondes d'arc, le coefficient devient

$$\frac{1,2666 \times 10^{-4}}{206265} = 6,1406 \cdot 10^{-10}.$$

Enfin, si l'on met en évidence dans le premier membre les courbures du géoïde, l'équation devient

$$\begin{aligned} \text{(VII)} \quad \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \sin 2(\alpha - \alpha_1) &= -\frac{2}{g} 6,1406 \cdot 10^{-10} (\theta)'' \\ &= -1,2514 \cdot 10^{-12} (\theta)'', \end{aligned}$$

en appelant α_1 l'azimut de la courbure principale R_1 , comptée à partir de l'origine des angles α , dans le sens choisi comme positif à la fois pour α et θ .

L'ellipsoïde de Bessel donnera une amplitude maximum de $\frac{\pm 5''}{1,25} = \pm 4''$, à 45 degrés de latitude.

La forme en ruban, qui donne un bénéfice de sensibilité considérable, a un autre avantage; elle est très facile à attacher, sans aucune altération, sous une longueur bien définie.

On pince le ruban dans une fente diamétrale d'un petit cylindre métallique, qu'on ferme au moyen d'une petite vis de pression à tête carrée à travers un anneau de serrage (fig. 4).

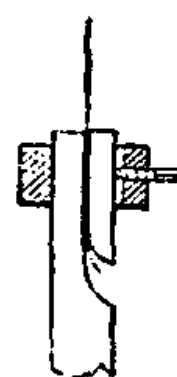


Fig. 4.

Cette manœuvre se fait facilement au moyen d'une clef de montre à longue tige : le ruban introduit par la fente, largement ouverte, du haut de l'appareil, est descendu jusqu'à la fente du balancier, immobilisé à bonne hauteur entre ses V comme pour le transport. Avec des brucelles d'horloger, on l'introduit facilement dans la fente et on serre. On serre ensuite à la partie supérieure après avoir tiré sur le ruban qu'on laisse un peu flottant.

La forme aplatie permet de réduire immédiatement la torsion à un petit nombre de degrés, lorsque le ruban est bien plat. Ceci, à vrai dire, est plutôt théorique, et exige que le laminage ait été parfaitement réussi. Les rubans que j'ai ne sont ni tout à fait droits sur de grandes longueurs, ni parfaitement plats, en sorte que le plan d'attache supérieur fait un angle assez considérable avec le plan d'attache inférieur.

J'ai essayé de les recuire sous charge par le passage d'un courant électrique; c'est une opération dangereuse, parce que le platine iridié fond franchement sans se ramollir, et qu'on ne voit un gain que tout près de la fusion; d'ailleurs le courant répartit mal la chaleur, puisqu'il chauffe davantage les points faibles, déjà minces; je n'ai obtenu aucune amélioration régulière.

J'ai amélioré quelques fils en les frottant sous tension et torsion convenables avec un cylindre en os, de manière à allonger le côté trop court; c'est un travail délicat, long et incertain, qui réussirait peut-être mieux en le combinant avec un chauffage modéré par le courant électrique, ou en frottant avec un cylindre métallique chaud.

Il vaudrait probablement mieux étirer à la filière plate, comme on fait, paraît-il, pour les ressorts isochrones d'horlogerie. C'est ce que je me propose d'essayer.

J'ai toujours employé le fil fortement écroui et dur. On sait pourtant que les résidus d'élasticité disparaissent beaucoup plus vite dans les fils mous que dans les fils durs, et qu'on obtient des zéros très fixes avec des fils bien recuits d'argent ou de cuivre. Cela est vrai au laboratoire, et tant que le fil ne subit pas de choc; après un choc, le zéro est plus ou moins déplacé brusquement et, au bout de quelques jours ou quelques heures, il redevient fixé.

Dans un appareil à très longue durée d'oscillation, soumis à des transports, et, pour l'expérience même, à des changements d'azimut nombreux, les chocs peu intenses sont extrêmement fréquents, au cours d'une seule série de mesures. Si chaque choc produisait un changement brusque de zéro, même minime, aucune mesure ne serait possible. Il faut que les chocs faibles ne produisent que des déplacements du zéro nuls ou séculaires; c'est ce qu'on obtient avec les fils très fortement écrouis. Les déplacements séculaires du zéro, pourvu qu'ils soient faibles, sont faciles à corriger grâce à leur régularité.

La mesure des angles de torsion. — La rapidité des opérations est directement liée à la délicatesse de la mesure des angles de torsion; tout bénéfice de ce côté permet de diminuer la période et, par conséquent, d'abréger les opérations sans perdre en sensibilité finale. Le gain en temps croît comme la racine carrée du gain en angle; il faut quadrupler la précision de mesure des angles pour réduire le temps de moitié. J'ai adapté à l'appareil un procédé de mesure des angles peu encombrant et très sensible, par des franges d'inter-

férence cristallines. La théorie détaillée en sera donnée plus loin avec toutes les indications relatives à l'évaluation des angles en valeur absolue par ce procédé, soit d'après les données de construction, soit par une graduation expérimentale. Les lectures se font actuellement à 0" 9 environ ⁽¹⁾. Je ne désespère pas de les améliorer beaucoup encore sur un appareil qui permettrait des réglages plus précis.

Stabilité. — Enfin, dans les mesures hors du laboratoire, il importe d'avoir une stabilité parfaite malgré les trépidations du sol. Bien entendu, il faut toujours que le sol soit assez ferme et ne cède pas sous le poids de l'appareil et de l'observateur; pour cela, il faut presque toujours enlever la première couche de terre meuble et élastique. Le sol ferme, quel qu'il soit, est alors apte à transmettre des oscillations de courte période et de faible amplitude, et certaines d'entre elles peuvent être synchrones de périodes propres, soit du trépied, soit des parties métalliques de l'appareil, soit du ruban de suspension considéré comme corde vibrante, et provoquer un tremblement de l'image gênant pour les lectures, ou même un mouvement général du balancier.

Je savais depuis longtemps avec quel succès toutes ces trépidations transmises par les murailles dans les grandes villes sont arrêtées par des supports d'ouate et de feutre convenablement chargés. J'ai donc disposé, comme on le verra au chapitre suivant, des coussins de ce genre à l'intérieur de l'appareil pour supporter le tube à la partie supérieure duquel est attaché le ruban de torsion. J'en ai constaté les bons résultats, d'abord au Puy-de-Dôme, où les secousses transmises de la tente au sol par les rafales de vent auraient affolé tout autre appareil; et plus récemment au Simplon, où j'ai pu continuer à faire les lectures précises pendant le passage du train à une distance de 5 mètres seulement, et suivre l'impulsion due à l'action newtonienne du train passant à cette petite distance de l'appareil, comme j'en donnerai un exemple plus loin.

⁽¹⁾ $\pm 4,4$ divisions pour l'ellipsoïde de Bessel à 45 degrés de latitude.

CHAPITRE III

DESCRIPTION DÉTAILLÉE DE L'APPAREIL.

Les parties essentielles de l'appareil sont :

- 1° Le balancier horizontal et son ruban de torsion ;
- 2° Le système optique pour la mesure des petits angles de torsion ;
- 3° Le pied avec cercle azimutal et enveloppes protectrices contre les courants d'air, les inégalités de température et les trépidations, etc ;
- 4° La lunette d'orientation azimutale ;
- 5° Les accessoires nécessaires pour les réglages optiques et l'étalement en valeur absolue au laboratoire ;
- 6° La caisse d'emballage pour le transport et tous les accessoires de travail en campagne.

Le système optique sera décrit en détail aux chapitres suivants. Des indications ont été données sur le balancier au chapitre II ; le détail sera plus intelligible après la description de l'ensemble de l'appareil.

Disposition générale. — Il est nécessaire, malgré l'augmentation d'encombrement, que la ligne de visée soit perpendiculaire à la longueur du balancier ; il importe en effet que la petite lampe et le corps de l'observateur exercent une action thermique aussi faible et aussi symétrique que possible sur les deux extrémités du balancier ; il en est de même de l'action newtonienne du corps de l'observateur, qui doit s'asseoir symétriquement, et toujours de la même manière, avec d'autant plus de soin que la sensibilité est plus grande.

LE PIED AZIMUTAL ET LES ENVELOPPES.

(Pl. I et fig. 5.)

Première enveloppe. — Le balancier B est enfermé dans un long cylindre E en laiton, de 3 millimètres d'épaisseur et de 6 centimètres de diamètre interne, à l'intérieur duquel sont disposées de manière facilement amovible les enveloppes fixes des cylindres amortisseurs et les coulisses d'arrêt. Ce cylindre est fermé aux deux bouts par des couvercles vissés.

Au milieu de la partie supérieure de ce cylindre est soudé un court tube vertical terminé par un anneau horizontal. C'est sur cet anneau que se fixe par quatre vis le tube vertical T, muni de deux longues portes, à l'intérieur duquel repose, par l'intermédiaire d'ouate et de feutre, la colonne de suspension du balancier qui sera décrite plus loin. Le haut du tube est fermé par le couvercle vissé CC'.

Tout cela forme la première enveloppe protectrice; dans l'appareil actuel, les longues portes verticales ne constituent pas une fermeture assez hermétique; mais le ruban de torsion, en face duquel elles ouvrent, n'offre aucune prise sensible à l'air, et cet inconvénient n'a pas d'importance. J'ai quelquefois enveloppé tout ce tube d'un manchon de flanelle, ce qui empêche la production de filets d'air par les fentes des portes; je ne me suis pas aperçu d'un gain sensible les jours de grand vent.

Deuxième enveloppe. — Un second cylindre de laiton E', de même épaisseur et de 9 centimètres de diamètre intérieur, enveloppe le premier et le déborde en longueur. Il est fermé de même par deux couvercles vissés; il supporte de même en son milieu un long tube vertical épais, fixé par 4 vis. Un anneau de feutre épais occupe à la base tout l'intervalle des tubes verticaux, et empêche tout échange rapide d'air entre l'espace annulaire horizontal et l'extérieur.

La première enveloppe est rigoureusement liée à la deuxième

par deux anneaux de « fibre », placés près des extrémités et maintenus par des vis.

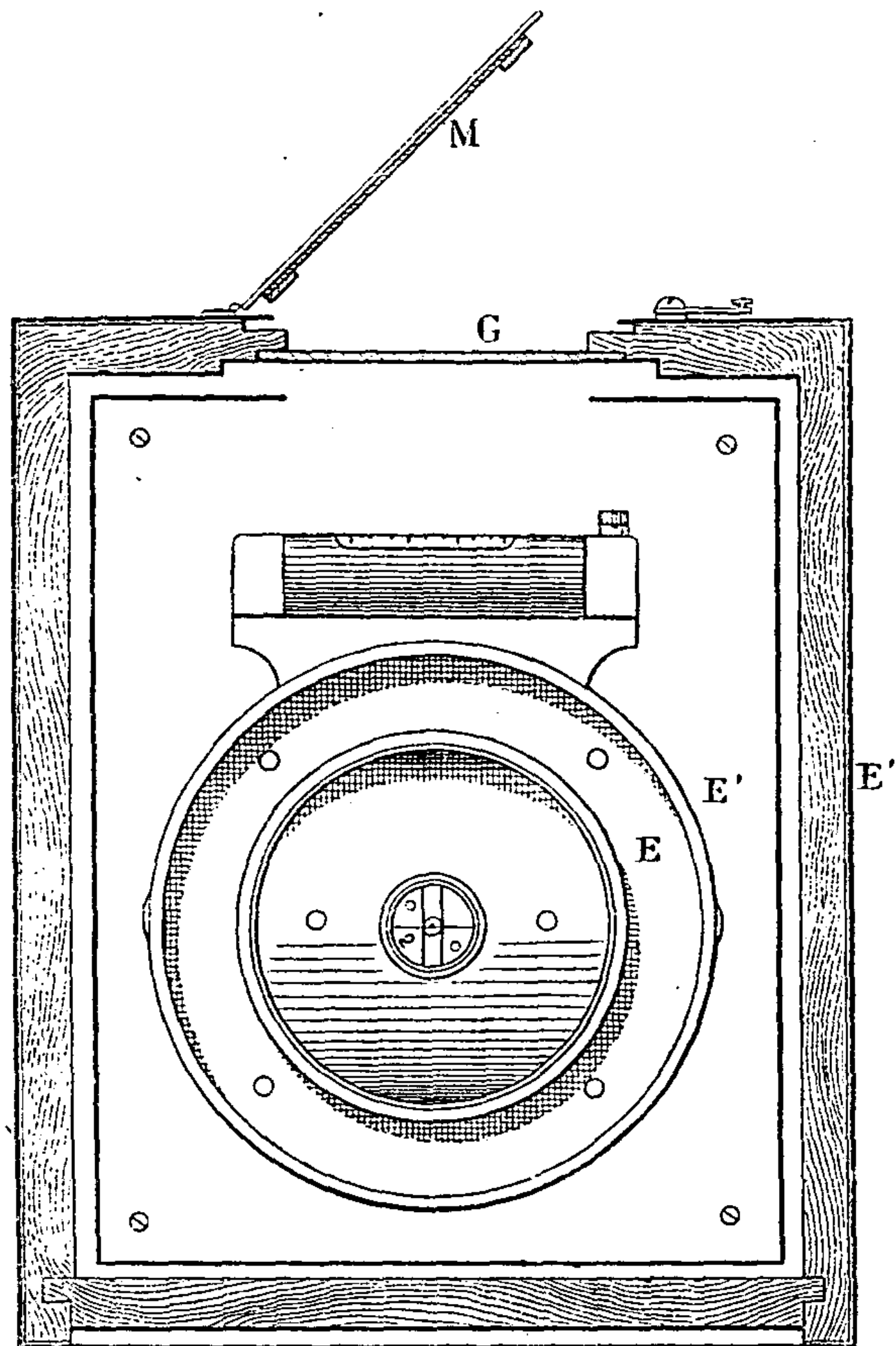
Sur le cylindre extérieur sont fixés deux niveaux sensibles (fig. 5), réglables, l'un perpendiculaire, l'autre parallèle à l'axe du cylindre. Ce cylindre extérieur est rigidement fixé sur le disque azimuthal par deux consoles en laiton vissées sur des plaques de fibre, elles-mêmes fixées au disque par des boulons.

Sur une courte colonne carrée, fixée au disque azimuthal, coulisse un bras horizontal au bout duquel on pose la petite lampe qui éclaire tout l'appareil optique.

Remarques. — Dans l'appareil primitif, ces deux cylindres constituaient la seule protection contre les inégalités de température, et je pensais, d'après les indications de M. Eötvös, qu'elle serait suffisante. L'appareil de visée optique a été alors disposé à 4 centimètres seulement au-dessus du cylindre extérieur; le tube de laiton extérieur est percé de deux ouvertures circulaires pour le passage de la lumière; l'anneau A de l'appareil optique (pl. I et II), qui tourne et glisse à frottement doux sur le tube vertical fixe, fermait constamment ces ouvertures, soit dans sa position de service perpendiculaire au balancier, soit dans sa position de transport parallèle au balancier; le passage d'une des positions à l'autre se faisait en soulevant un peu pour dégager l'anneau de la goupille d'arrêt, puis tournant et abaissant la seconde encoche sur la goupille. L'addition d'une troisième enceinte a fait perdre un peu de cette simplicité de manœuvre.

Troisième enveloppe. — Dès les premiers essais au dehors, l'insuffisance de protection thermique devint évidente. J'y remédiai d'abord partiellement en enveloppant tout le cylindre horizontal d'ouate maintenue par du papier d'étain et des anneaux de caoutchouc. Puis je me décidai à organiser une troisième enveloppe permanente. En outre, je reconnus que la lampe s'échauffait elle-même assez fortement et pouvait échauffer l'appareil par conductibilité de son support vissé dans le plateau de laiton azimuthal.

Pour permettre aux cylindres de bien remplir leur office d'égaliseurs de température, il importe qu'ils reçoivent peu de chaleur du dehors; il faut donc les isoler thermiquement le mieux possible.



Échelle $\frac{1}{2}$

Fig. 5.

Pour cela, les consoles de laiton ont été isolées du disque par les plaques de fibre; une planche de noyer, de 1 centimètre d'épaisseur, a été fixée sur le disque azimutal. Cette planche sert de support à la troisième enveloppe protectrice, formée de trois parties, l'une fixe au centre, les deux autres amovibles aux deux bouts.

Toute cette enveloppe E'' est constituée par des planches de noyer verni, de 1 centimètre d'épaisseur, garni sur ses deux faces de laiton mince, nickelé, maintenu par quelques cales à 1 ou 2 millimètres du bois. Pour les boîtes amovibles (fig. 5) le dessous est formé par la planche fixe en bois qui s'engage à coulisser entre les deux enveloppes de laiton mince, sans les toucher; ces boîtes amovibles ne sont donc ouvertes que sur la face verticale qui regarde l'axe de l'appareil. Une fois enfoncées, leurs bords s'engagent dans les rainures des montants fixes, les rebords des parties métalliques se recouvrent; la fermeture devient à peu près hermétique; des crochets maintiennent ces boîtes bien en place.

On voit sur la figure une glace transparente G et un miroir M fixé sous un couvercle à charnière qui permet à l'observateur de voir les niveaux de sa place et de rectifier au besoin le nivellement. Ces couvercles se rabaisent et se ferment pendant les transports.

La partie fixe de cette troisième enveloppe est formée par des planches de noyer, munies de leur double protection métallique; deux d'entre elles laissent passer, sans contact, les cylindres horizontaux de laiton, le petit intervalle annulaire est obstrué par de la ouate; elles forment les fonds verticaux fixes des boîtes amovibles. Le fond vertical qui fait face à la lampe est entièrement clos; celui qui fait face à l'observateur est muni d'une porte pour la manœuvre des arrêts du balancier, cette porte est généralement fermée.

Enfin, le fond horizontal supérieur laisse passer les tubes de laiton verticaux, sans contact, et l'espace annulaire est bourré d'ouate.

Dans ces enveloppes, le feutre ou la ouate servent, non d'amortisseurs, mais de filtres en chicane, pour ralentir les échanges d'air avec l'extérieur, et surtout éviter les courants minces capables de produire des inégalités de température locales des cylindres de laiton. — C'est cette enveloppe rectangulaire, moins haute au milieu, pour le passage de la lumière, qui donne à l'appareil son aspect extérieur massif.

Ces précautions minutieuses assurent le bon fonctionnement de l'appareil dans presque toutes les circonstances. Une tente *bien*

close, si le ciel est couvert, double s'il y a du soleil, suffit pour que la marche du zéro soit lente et régulière. Mais on ne peut pas opérer avec précision dans le voisinage d'un poêle, ou au soleil, ou à l'air libre sans tente, ou dans un courant d'air un peu irrégulier.

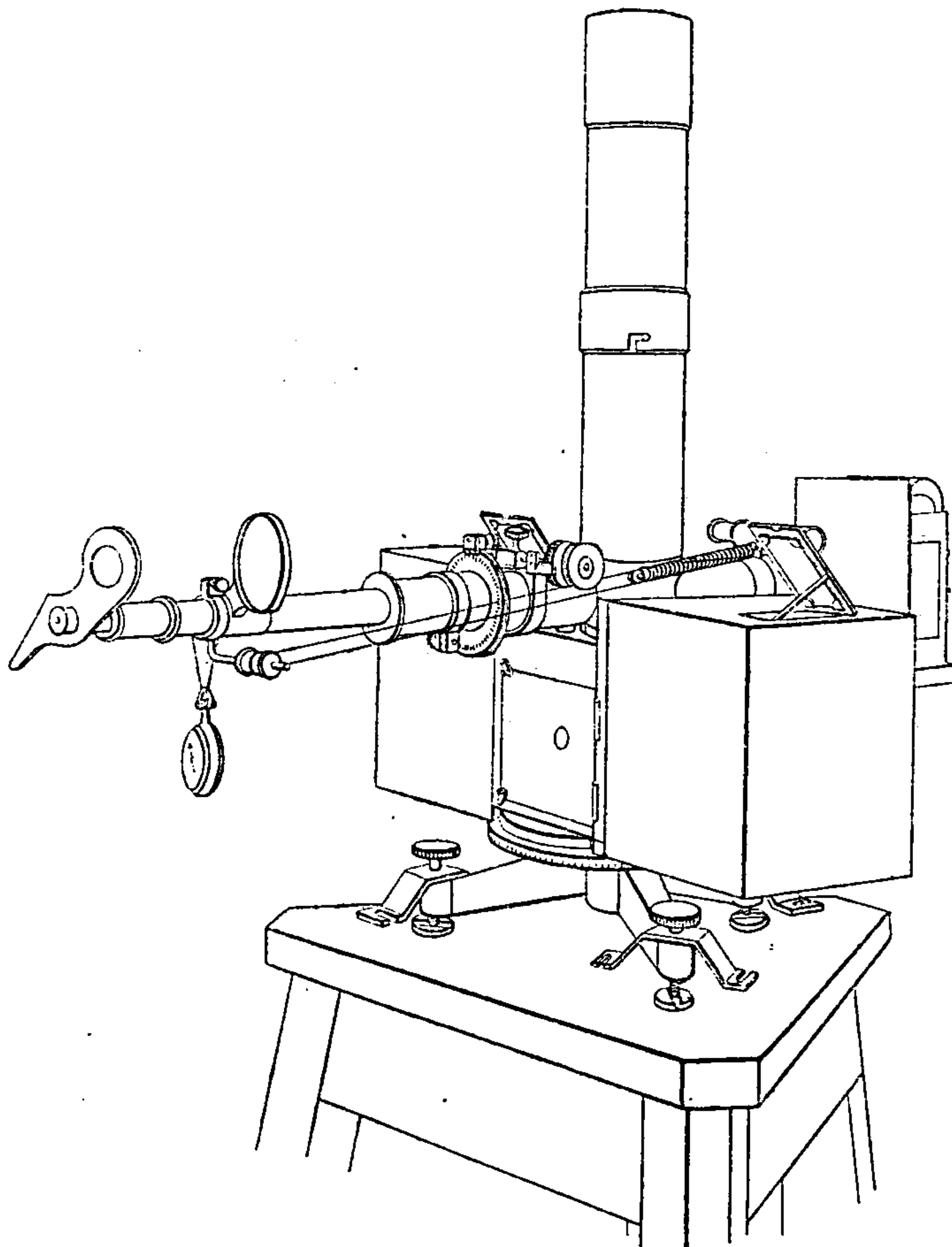


Fig. 6.

Il y a donc encore à gagner de ce côté, par une étude méthodique des conditions à remplir pour une bonne protection, ce que j'espère réaliser d'ici peu.

Enfin, le cercle azimutal divisé tourne devant une alidade fixe, liée au trépied à vis calantes.

Dans mon appareil, l'addition des boîtes rend la lecture du repère difficile dans certaines positions; il vaudrait mieux que le cercle divisé soit fixe, et le repère mobile comme d'ordinaire. En outre l'appareil ayant été alourdi, l'axe de rotation est un peu court, et le nivellement doit être un peu retouché à chaque changement d'azimut.

Tout l'appareil, avec le viseur, pèse environ 45 kilogrammes. Pour éviter tout accident en service, il est solidement maintenu appliqué à son support par un fort *ressort à pompe*.

Pied. — Le support qui me sert en voyage est un trépied de laboratoire en chêne, sans aucune articulation. Ces supports se mettent aux bagages sans autre précaution que de couvrir les crapaudines, et ont l'avantage d'être bien rigides. En travail un homme les porte facilement sur l'épaule (18 kilogr.); dans les habitations, sur les routes, la large surface des pieds repose bien sur un sol suffisamment horizontal; en plein champ, il faut de toute façon aller chercher le sol stable, au-dessous des herbes. J'ai quelquefois employé un support un peu plus lourd; le long d'un des pieds coulisse une seconde jambe de chêne terminée par une forte pointe en laiton, qui permet d'installer l'appareil sur une pente quelconque; c'est alors la position de l'observateur qui dans certains azimuts est fort incommode.

Intérieur de la première enveloppe (pl. I). — Les détails de construction du balancier et de l'intérieur de la première enveloppe ont été étudiés de manière à rendre tout le démontage facile. Le cylindre fixe de chaque amortisseur est formé de deux parties : un demi-cylindre extérieur avec sa fenêtre et ses traits de repère (pl. I, n° 3 et fig. 5); deux petits boutons permettant de l'enlever ou de le mettre en place facilement. Quand on l'a enlevé, le balancier étant bien serré entre ses V, on dévisse avec une clef de compas l'écrou du balancier (fig. 5 et 7), et on peut retirer sans difficulté tout le disque et le cylindre amortisseur du balancier.

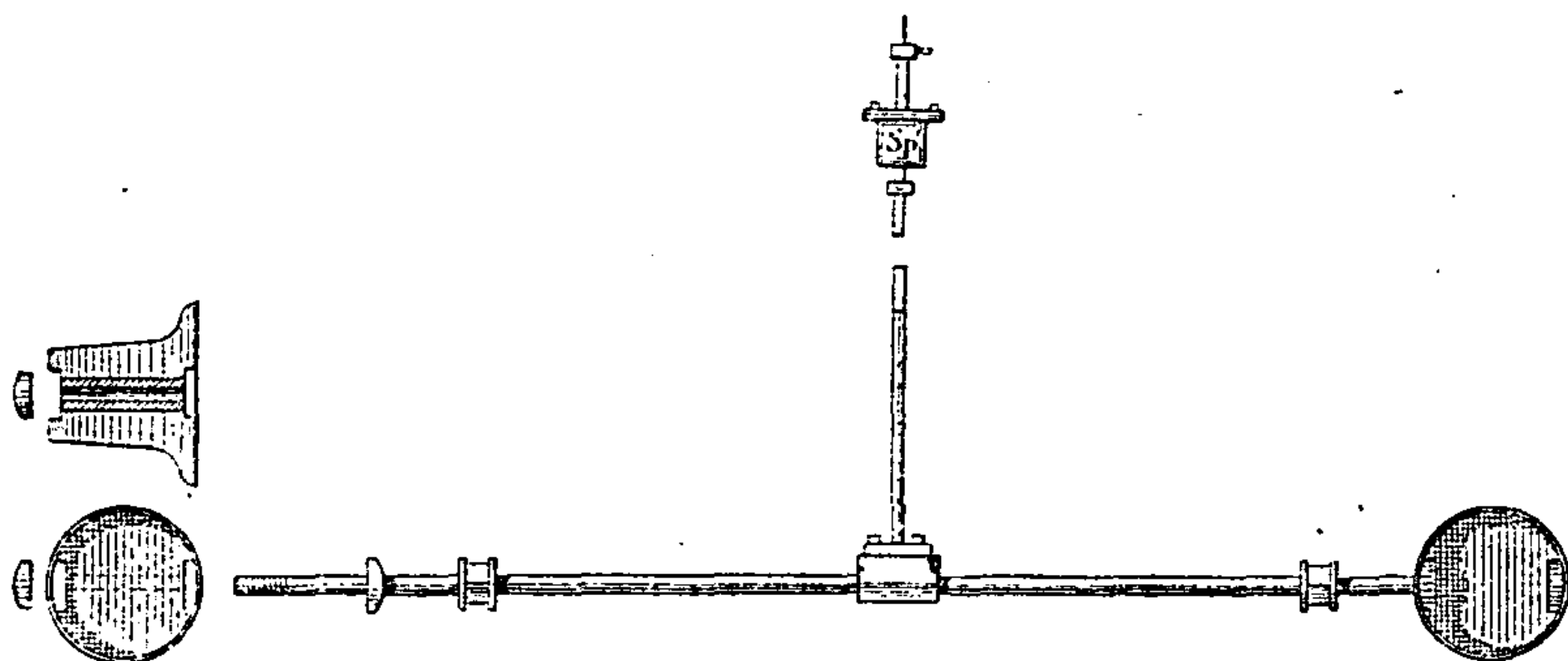
On fait la même opération à l'autre bout du balancier, pour le laisser équilibré, et on ouvre les V.

Tout l'ensemble du demi-cylindre amortisseur fixe qui reste, et du disque qui porte les coulisses et l'organe de serrage, peut alors être retiré avec quelques précautions. L'appareil de serrage reste naturellement ouvert, et son ouverture est plus grande que les joues portées par la tige horizontale du balancier.

Toutes ces pièces sont munies d'encoches et de goujons, et se remettent exactement en place. Une fois vissé, le couvercle du tube bloque toutes les pièces, qui ne peuvent plus remuer.

Au milieu du tube, au-dessus des pignons (pl. I, n° 1), on voit un repos horizontal, sur lequel on appuie le balancier pour visser ou dévisser les deux vis qui fixent la tige verticale de suspension, comme on verra plus loin.

Balancier. — Le balancier est formé de plusieurs parties séparables, comme nous l'avons déjà vu dans un chapitre théorique. Ce sont (fig. 7 et pl. I, n° 1) : Une tige cylindrique horizontale,



Échelle $\frac{1}{4}$

Fig. 7.

qui porte en son milieu un renforcement carré à faces horizontales, et vers les extrémités deux carrés à 45 degrés de l'horizon, limités par des joues — pour le serrage —, deux appuis circulaires avec goupilles, et au bout un pas de vis.

Les disques d'inertie et les cylindres amortisseurs s'enfilent sur l'extrémité de la tige, jusqu'aux appuis circulaires qui complètent leur forme, et s'y placent exactement grâce aux goupilles; ils sont maintenus par des écrous, qu'on tourne avec une clef de compas.

Les cylindres amortisseurs ne sont pas terminés par des sections droites; on les a faits plus longs du côté interne, parce que, de ce côté, les cylindres fixes ont une assez large ouverture centrale (15 millim.) pour le libre passage de la tige du balancier, et que la résistance de l'air entre les deux cylindres serait notablement diminuée si la longueur de toutes les génératrices du cylindre mobile était la même. La tige de suspension du balancier se compose de deux parties : une tige de cuivre terminée en haut en prisme triangulaire; elle se fixe par deux vis sur la face horizontale du carré situé au milieu du balancier; — ces deux vis sont faciles à atteindre par l'ouverture supérieure des enveloppes de l'appareil, quand les deux tubes verticaux sont enlevés. Sur le prisme triangulaire vient s'enfiler, sans jeu, la monture du spath 1 lié au balancier; une petite vis de pression, à tête carrée, qu'on commande par une longue clef de montre, permet de fixer cette monture sur le reste de la tige à bonne hauteur. Cette opération se fait sans difficulté après avoir ôté le tube de laiton extérieur, et ouvert les portes du tube intérieur T, ce qui permet de saisir le haut de la tige avec des brucelles d'horloger; on ôte aussi la glace *g* (pl. I, n° 5) pour le passage de la clef de montre. Le balancier étant immobilisé, la mise en place ou la séparation s'effectuent sans danger pour le ruban de torsion.

Toute cette monture du spath 1 est en aluminium; il vaudrait mieux qu'elle soit en cuivre, comme on le verra plus loin (magnétisme du balancier); mais j'ai conservé, par raison d'économie, la monture associée à mon premier balancier d'aluminium, après que j'ai eu renoncé à celui-ci. C'est en effet une pièce très délicate; la monture cubique doit être soigneusement travaillée sur ses faces internes, de manière que le spath vienne s'y loger sans aucun jeu, et sans cales, et que sa section principale soit bien horizontale quand

le balancier est libre. Une épaisseur de vernis à la gomme laque établit la liaison entre le spath et sa monture, et une goutte de cire à l'extérieur dans chaque coin achève de le maintenir. Ôter le spath de sa monture est une opération dangereuse pour le spath; changer la monture, c'était donc m'exposer à avoir besoin de deux nouveaux spaths; c'est pourquoi je l'ai conservée.

J'ai essayé divers modes de liaison du balancier au ruban de torsion; en vue d'un échange facile du ruban de torsion j'avais d'abord fait faire des crochets dans le genre de ceux ordinairement employés dans les magnétomètres. La substitution d'un fil à un autre rompu était ainsi très rapide; mais la mobilité des pièces rendait la rupture trop facile, et, en outre, la liaison entre le ruban de torsion et le balancier n'était pas assez invariable, et changeait d'une observation à l'autre. J'ai alors fait enlever ces crochets d'aluminium, et fixer avec des vis une pince d'attache en laiton, qui donne une liaison rigoureuse (fig. 7).

Arrêts du balancier. — Le grand moment d'inertie du balancier oblige à l'immobiliser près de ses extrémités dans tous les transports; il est bon que la position d'arrêt du balancier soit un peu plus élevée que la position libre, pour détendre le fil, mais assez peu pour qu'il ne flotte pas en tous sens. Pour obtenir ce résultat; le balancier porte deux carrés limités vers l'intérieur et vers l'extérieur par des joues. Chacun de ces carrés est serré entre deux V de laiton épais (pl. I, nos 2 et 3); le balancier ne peut ainsi ni tourner, ni glisser sensiblement. Le mouvement des V est commandé par un seul bouton moleté extérieur, dont la tige se termine à l'intérieur par un pignon d'angle; celui-ci engrène sur un autre pignon égal (pl. I, n° 1) claveté au milieu d'une longue tige parallèle au balancier. A chacune de ses extrémités cette tige porte une manivelle excentrée dont la rotation d'un quart de tour soulève ou abaisse la plaque de serrage inférieure; celle-ci entraîne en sens inverse la plaque supérieure par l'intermédiaire d'un petit levier à bras égaux dont le milieu est fixe (pl. I, n° 1 et 2). Une

pince de serrage extérieure permet d'immobiliser le bouton moleté et, du même coup, les quatre V et le balancier.

Les coulisses verticales entre lesquelles glissent les plaques de serrage sont fixées sur des disques solidaires des demi-cylindres amortisseurs fixes.

Ces arrêts suffisent pour tous les transports surveillés et de peu de durée. Mais pour les longs trajets en chemin de fer, il faut empêcher la tige verticale du balancier de vibrer, ce qui pourrait endommager les spaths par des chocs, et briser le fil. Comme ces transports sont rares, je me suis contenté de procédés de laboratoire; au début j'ai calé la monture du spath mobile à l'intérieur du tube vertical, au moyen de lièges soigneusement découpés, et réunis les uns aux autres par des épingles qui les traversent; le procédé est très bon, mais les lièges s'abîment après quelques voyages. Depuis, j'ai découpé deux lames de zinc qui viennent saisir la tige un peu au-dessous du point d'attache du ruban de torsion, et qui sont complètement immobilisées par la fermeture des portes du tube intérieur; très bon procédé également. L'un et l'autre ont l'inconvénient qu'il faut dévisser le tube vertical de laiton extérieur et l'enlever pour ouvrir les portes du tube intérieur. Il vaudrait mieux avoir des V commandés du dehors; j'avais essayé au début un serrage en *iris* d'objectif photographique, mais la solidité en est tout à fait insuffisante.

Le support du ruban de torsion et du spath fixe. — Le support du ruban de torsion et celui du spath fixe sont associés d'une manière rigide l'un à l'autre; mais par des intermédiaires assez compliqués pour permettre tous les réglages. Je n'en décrirai que les éléments essentiels, parce que les retouches auxquelles cette partie de l'appareil a été soumise ont rendu certaines dispositions inutiles, et d'autres pourraient être avantageusement simplifiées.

Commençons par le bas (pl. I, n° 1).

La base du tube vertical T de la première enveloppe métallique est rétrécie par un anneau métallique que remplit un anneau de

feutre épais. Sur cet anneau repose, par une embase annulaire moins large, le tube de laiton intérieur, auquel est fixé le spath fixe.

Sur ce tube sont fixés, en avant et en arrière (pl. I, n° 5), des coins métalliques, percés d'ouvertures cylindriques horizontales en regard. Dans l'ouverture d'avant (côté de la lampe) est une bonnette avec une simple glace g . A l'arrière, l'ouverture est plus large, et laisse libre jeu à un tube de laiton horizontal de 1 centim. 5 de longueur, soudé à une plaque de laiton verticale épaisse; cette plaque est maintenue contre le coin métallique par six vis $v_1, v_2, v_3, v'_1, v'_2, v'_3$ (pl. I, n°s 1 et 5). Les vis du milieu, v_2, v'_2 , sont vissées dans la plaque mobile, et appuient par leur pointe contre le coin fixe. Les quatre autres vis v_1, v'_1, v_3, v'_3 traversent librement la plaque et se vissent dans le coin fixe. Ces six vis permettent d'orienter avec précision et d'immobiliser absolument la plaque et, par conséquent, le spath fixe Sp_2 , autour d'un axe vertical et de l'axe horizontal v_2, v'_2 , perpendiculaires aux rayons lumineux.

Le réglage autour du 3^e axe, le rayon lumineux, demande beaucoup moins de précision; on l'obtient par la rotation de la bonnette qui porte le spath à l'intérieur du tube horizontal fendu, et on immobilise en serrant une pince annulaire. Cette bonnette, extérieurement cylindrique, est taillée intérieurement en prisme carré, dans lequel le spath Sp_2 s'engage sans jeu, et est maintenu par une trace de vernis à la gomme laque et des gouttes de cire dans les coins.

Vers l'intérieur; une bonnette différente, mobile, à frottement dur, porte la lame demi-onde L . On verra plus loin l'ordre des réglages.

L'intervalle entre les coins métalliques et les parties montantes du tube-enveloppe T est occupé par du drap feutré épais, qui fixe suffisamment l'orientation générale du système des spaths par rapport aux enveloppes de l'appareil et aux quartz, sans transmettre de vibrations.

Toute cette monture des spaths est rigidement liée au point de suspension du ruban de torsion, par l'intermédiaire de quatre

longues colonnes verticales⁽¹⁾ réunies en haut par un disque et suivies d'un tube de laiton de 1 centimètre de diamètre et de 2 centimètres de hauteur qui traverse la boîte à ouate. En haut de ce tube, on fixe par un collier un support (pl. I, n° 4) qui comporte un mouvement de translation horizontal, parallèle au balancier, et un mouvement de rotation, commandé par une large tête moletée.

La coulisse de translation est maintenue entre deux vis de butée; elle est nécessaire, parce que la boîte à ouate ne comporte pas un centrage précis, et qu'il faut néanmoins placer le balancier bien symétriquement au milieu de ses amortisseurs, lorsque l'appareil est bien nivelé; on reconnaît l'exactitude du réglage à ce qu'il faut déniveler également à droite et à gauche pour amener le balancier à toucher les amortisseurs.

La tête moletée peut tourner d'un mouvement très doux, qu'on commande par un appareil accessoire, que je décrirai plus loin, pour le réglage du balancier en azimut. Elle est entourée d'un anneau fendu, sur lequel serre la vis V, quand on veut l'immobiliser; le serrage ne dérègle pas de plus de quelques divisions, moins d'un dixième de frange.

Enfin, au centre de cette tête moletée, se trouve la pince de serrage du ruban, avec son anneau et sa vis à tête carrée.

La boîte à ouate (pl. I, n° 1). — La boîte à ouate est fixée à l'intérieur du tube T⁽²⁾; c'est une boîte filetée à l'intérieur, dans laquelle on peut visser des disques à large ouverture centrale, au moyen d'une longue clef à ergots; d'autres disques de diamètre moindre se vissent de même, par leur trou central, autour du tube que traverse le ruban de torsion. Des anneaux d'ouate découpés avec un emporte-pièce bien tranchant sont intercalés entre les disques intérieurs et extérieurs, dont on règle le serrage

⁽¹⁾ Je supprime quelques détails de construction devenus inutiles.

⁽²⁾ Un mécanisme à rampe hélicoïde,

qui permet de la faire descendre ou monter sans rotation, ne paraît plus nécessaire.

de manière à ne pas laisser de ballottement appréciable. Ce réglage doit être fait avant la mise en place du ruban de torsion.

Le tout est protégé par le couvercle vissé CC' . Pendant les longs transports, il importe que tout ce support des spaths et du ruban de torsion ne se déplace pas. Pour cela je dévisse le couvercle C' , j'introduis un liège soigneusement taillé, qui cale la pièce 4 très exactement en hauteur et latéralement, et je revisse le couvercle C' , au moyen de ses quatre vis, après avoir intercalé une flanelle au-dessus du liège. Ce serrage est doux et ne tord pas le fil. Il est nécessaire pour éviter les ruptures en chemin de fer.

Mise en place de l'appareil. — Sous sa première forme, l'appareil avait été divisé en deux parties qui s'emballaient dans des caisses séparées : le pied à vis calantes et le plateau divisé, avec tous les accessoires, d'une part; l'appareil proprement dit, d'autre part. Cela faisait deux caisses plates, que je pensais faire porter sur le dos avec des bretelles. Mais mon premier voyage en Espagne (1900) me montra que l'une des caisses était déjà trop lourde et trop encombrante, et surtout que la pose de l'appareil sur le plateau divisé dans chaque station rendait le nivellement pénible. Je me décidai donc à laisser l'appareil tout monté pendant mon séjour, et à le faire transporter sur un brancard porté par deux hommes. Les porteurs marchaient avec précaution, et étaient suivis du porteur du trépied et de tous ceux qui portaient la tente, en procession; l'appareil était recouvert d'un plaid, pour le protéger contre la poussière et le soleil; on l'avait baptisé « la Madone ».

C'est au retour de ce voyage que je fis ajouter la 3^e enveloppe, et faire toute une série de modifications. Lorsque j'eus l'occasion, quelques années plus tard (1903), d'emporter l'appareil au Puy-de-Dôme, j'organisai un emballage tout à fait différent, que je décrirai bientôt. Mais je rencontrai une autre difficulté; l'appareil est devenu lourd et, avec sa troisième enveloppe de bois, il n'offre plus de prise commode à la main; il faut le prendre d'une main sous l'axe, et, de l'autre, le maintenir par son tube vertical,

sans appuyer sur l'enveloppe de bois que l'on risquerait de casser. C'est une manœuvre un peu inquiétante.

J'ai donc organisé autre chose pour le voyage au Simplon (1906). C'est une solide armature en fer, facile à saisir à pleine main au-dessus du milieu de l'appareil; la partie inférieure est un fer plat, arrondi à la forge en forme d'U horizontal (fig. 8). On glisse cet U sous les têtes des vis calantes⁽¹⁾, qui pénètrent dans trois larges fentes, et sont maintenues en tout sens quand on les soulève. On peut d'ailleurs appuyer les entretoises contre les hanches et la poitrine sans toucher aucune partie de l'appareil. Un transport de quelques mètres se fait alors en toute sécurité.

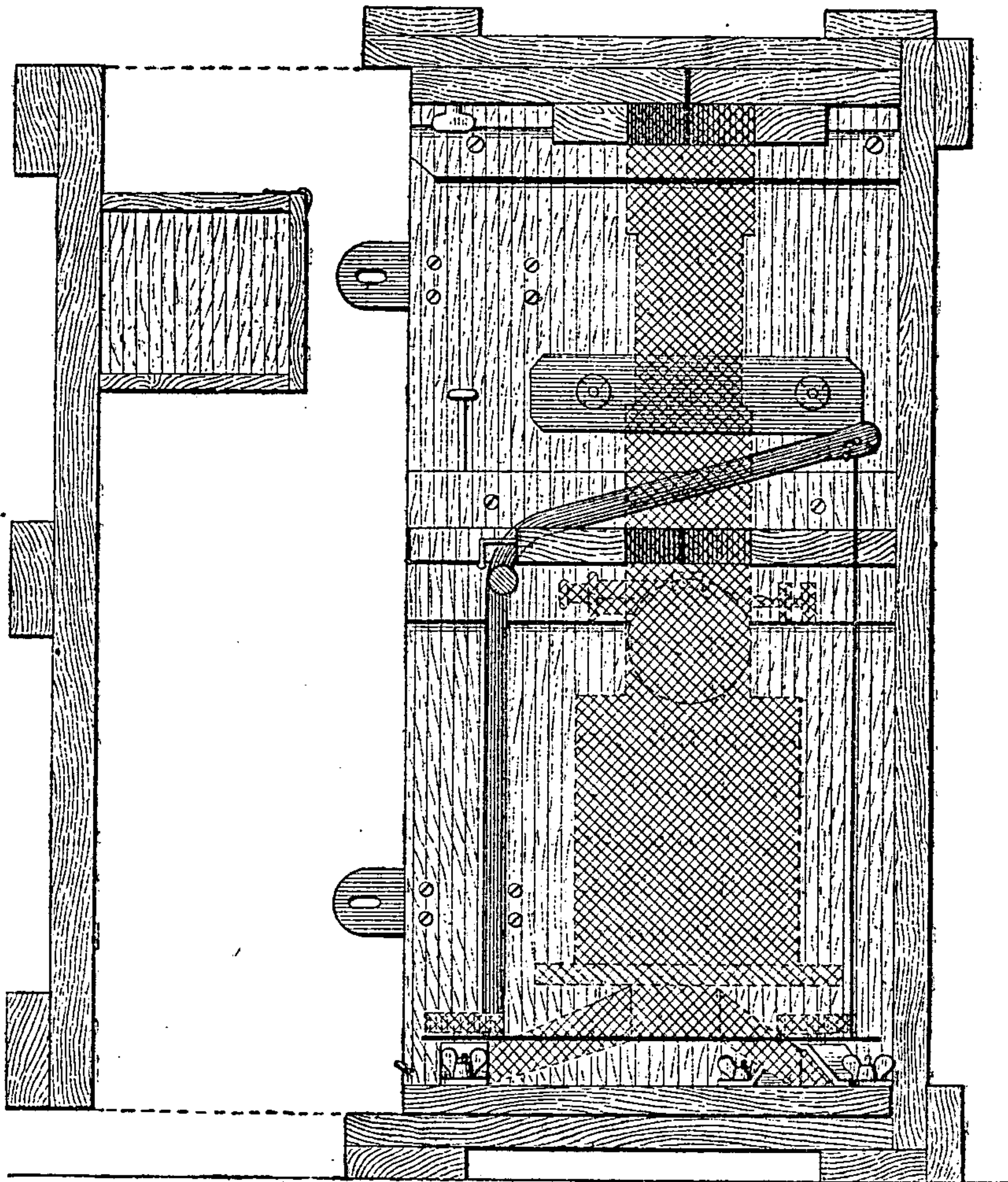
Emballage (fig. 8). — Pour le transport, l'appareil est emballé dans une forte caisse en bois blanc imprégné d'huile. On le pose sur une planche, qui coulisse au fond de la caisse; l'appareil est solidement maintenu au moyen de 3 pièces de laiton qui saisissent les 3 branches du pied autour des vis calantes (fig. 6 et 8) et sont serrées contre la planche au moyen d'écrous à oreille comme on voit au bas de la figure 8. Deux autres planches à coulisse percées d'un trou circulaire garni de drap, et coupées en leur milieu, maintiennent l'une le milieu, l'autre l'extrémité supérieure de l'appareil. Enfin, on dévisse doucement le couvercle du tube vertical extérieur de manière à achever de caler l'appareil en hauteur.

Une fois en place les trois planches sont maintenues par des goupilles.

Pour cet emballage la lunette IV (pl. II et III) a été enlevée, le fil de commande de la vis micrométrique replié comme on verra plus loin; le reste du tube optique a été soulevé, tourné de 90 degrés; un tube à charnière et ergots a été introduit au-dessous pour obturer les ouvertures et protéger le spath fixe. La planche du milieu empêche tout mouvement en hauteur du tube optique, dont les mouvements de rotation sont empêchés par les ergots.

⁽¹⁾ Il vaudrait évidemment mieux ajouter directement aux 3 branches du

pied des crochets indépendants des vis calantes.



Échelle $\frac{1}{6}$

Fig. 8.

La place de l'appareil est figurée par les hachures croisées. On voit l'armature de fer, avec sa tige transversale en coupe, le fer plat inférieur qui passe sous les têtes des vis calantes, et les crochets à droite.

On voit aussi les trois planches horizontales qui maintiennent l'appareil en place; l'une complète en bas, les deux autres, coupées, au milieu et en haut.

Des pitons et des ficelles permettent d'attacher aux parois de la caisse la lanterne, un bougeoir, le ressort qui fixe l'appareil au trépied de bois, le bidon à huile bien bouché. La lunette (IV) enveloppée de flanelle, une petite boussole, les bougies, les allumettes, etc., sont mises dans une boîte fixée au couvercle, fermée par des crochets et des cordes.

On peut enfin mettre le couvercle de la caisse, que maintiennent d'abord 4 forts crochets de laiton, et pour les longs transports, deux fortes barres de fer, extérieures, qui passent dans les ouvertures de fortes pattes de fer forgé visibles sur la figure, et sont munies de cadenas.

Toute cette caisse est robuste et ne craint pas l'humidité.

Pour le transport en service, deux solides poignées de fer sont boulonnées sur les côtés de la caisse, un peu au-dessus du milieu. Pour les transports un peu longs, plusieurs centaines de mètres, on entoure la caisse de deux ou trois tours d'une forte corde solidement nouée, qu'on fait passer à travers les poignées, et on passe un gros bâton dans la corde. La caisse est alors facilement portée, « en palanquin », par deux hommes, qui posent le bâton sur l'épaule; des traites de 1 et de 2 kilomètres ont été faites couramment ainsi dans le tunnel du Simplon, le premier porteur éclairant la route avec sa lampe, le second maintenant la caisse avec la main pour l'empêcher de ballotter. C'est un mode de transport très doux et qui présente toute sécurité malgré le poids de la caisse (58 kilogr.).

La caisse m'a généralement servi de siège; ses trois dimensions (33 centim., 52 centim., 72 centim.) s'adaptent bien aux divers terrains, et permettent de poser à côté de soi divers objets, calepin, crayon, bougies. Elle est facile à traîner par les poignées, à chaque changement d'azimut, et ne risque rien.

CHAPITRE IV.

OSCILLATIONS DU BALANCIER.

A. MISE EN LIBERTÉ DU BALANCIER.

Pendant le transport de l'appareil, et sa mise en position, le balancier était serré entre les V qui l'immobilisent; pour commencer l'expérience on desserre les V et on abandonne le balancier. Avec une construction idéale, le balancier serait libéré aux deux extrémités à la fois, sans vitesse, et oscillerait seulement en vertu de l'écart entre la position dans laquelle il est abandonné et sa position d'équilibre; mais ceci est irréalisable, ne fût-ce que par suite des imperfections du nivellement de l'appareil. L'une des extrémités est libérée la première; pendant un moment le balancier est suspendu à la fois par le fil et par l'un des V; et comme le plan qui contient l'extrémité supérieure du fil, le centre de gravité et le principal point de repos sur le V n'était pas nécessairement vertical au moment où la première extrémité est devenue libre, le balancier se met à osciller autour de sa ligne de suspension oblique. Dans mon appareil, en adoptant des nombres ronds, la hauteur du point de suspension est 40 centimètres au-dessus du centre de gravité, la distance des points de serrage des V à la verticale est 11 centimètres, la masse 200 grammes, le moment d'inertie 40,000 autour de la verticale; la période d'oscillation de ce pendule autour de son axe oblique de suspension est environ 40 secondes; le frottement sur le V est d'ailleurs considérable, et le retour au plan vertical se fait mal. Lorsque le fil de suspension est très lâche pendant le serrage, cette oscillation est très accusée; lorsque le fil est presque tendu, la libération aux deux bouts se fait presque au même moment: mais dans l'un et l'autre cas le balancier est lancé, avec une vitesse assez grande. Supposons qu'au moment où le

premier V l'abandonne, l'écart par rapport à la position d'équilibre comme pendule oblique soit 1 millimètre, soit sensiblement 0,005 en valeur angulaire; la vitesse maximum $2\pi \frac{0,005}{40}$ est 0,0008; le moment d'inertie étant alors environ 80,000, l'énergie est 0,025. Lorsque le balancier va devenir tout à fait libre, même en supposant qu'aucune impulsion nouvelle ne lui arrive, cette même énergie, avec moment d'inertie 40000, correspond à une vitesse 0,0011, et, comme la période est environ 600 secondes, à une amplitude $\frac{600}{2\pi} 0,0011$ ou 0,10 en angle, soit 1 centimètre. Or le jeu ne dépasse pas beaucoup 3 millimètres de chaque côté.

Il en résulte que, au moment où le balancier est abandonné, il vient battre contre les pièces fixes; c'est un inconvénient que l'observation m'a montré d'abord et que je n'ai pu arriver à éviter; j'ai essayé divers systèmes d'arrêts ou d'amortisseurs mous, pour limiter ces grands mouvements; mais je n'ai pas réussi d'une manière régulière à supprimer l'action de ces amortisseurs sans donner une nouvelle impulsion, de sorte que j'y ai renoncé finalement.

J'ai d'ailleurs reconnu plus tard que les grandes oscillations ont l'avantage de brasser l'air et de favoriser l'uniformité de température.

Suivant l'énergie initiale, les chocs se succèdent à intervalles plus ou moins longs; dans l'exemple choisi plus haut, les chocs se succèdent à 30 secondes environ, jusqu'à ce que l'amortissement ait suffisamment réduit l'amplitude. En fait, suivant les précautions avec laquelle on desserre, l'intervalle peut être de 4 ou 5 secondes au début, ou de 1 ou 2 minutes; mais il est difficile, presque impossible, d'éviter quelques chocs.

Je me suis astreint d'abord à immobiliser le balancier pendant chaque rotation de l'appareil pour passer d'un azimut au suivant. Plus tard, il m'a semblé qu'il y avait avantage au point de vue de la fixité du zéro à laisser le ruban de torsion constamment en charge même pendant le passage d'un azimut au suivant, malgré les chocs du balancier contre ses butoirs; le ruban n'étant pas

recuit, ces chocs ne changent pas sensiblement le zéro s'ils ne sont pas très violents, et, comme je viens de le dire, le brassage de l'air paraît avantageux. Dans mon appareil, avec le jeu angulaire $\pm \frac{1}{50}$ environ, et le faible couple de torsion du ruban, il faut, pendant la rotation de l'appareil, que l'accélération angulaire soit comprise entre $\pm 2,10^{-6}$ environ pour que le balancier reste libre⁽¹⁾; dès que l'accélération dépasse $+2,10^{-6}$ le balancier bute en arrière, et le couple moteur lui est fourni par le contact avec la boîte; si au contraire l'accélération est négative et inférieure à $-2,10^{-6}$, le balancier presse à l'avant, et le complément du couple retardateur lui est fourni par le contact avec la boîte.

On évitera donc les chocs multiples en tournant l'appareil d'un mouvement doux, constamment accéléré d'abord, constamment retardé ensuite de manière à arriver sans vitesse à la position finale. Il ne se produit ainsi qu'un choc au départ, et le choc opposé au moment du changement de signe de l'accélération. Pour éviter les chocs consécutifs à l'arrêt, il aurait fallu ralentir jusqu'à la vitesse 0,0004 environ, avant l'arrêt, soit 1 degré en 40 secondes! Une telle lenteur est irréalisable à la main; néanmoins, même en parcourant les 45 degrés en 3 ou 4 secondes, ce qui paraît déjà bien lent, on arrive à ralentir assez vers la fin pour qu'il ne se produise pas plus de 5 ou 6 chocs.

Il serait évidemment désirable d'avoir un mode d'entraînement et d'abandon du balancier qui supprime totalement les chocs; mais je n'y ai pas encore réussi.

Sous l'influence d'une résistance $R\alpha$ proportionnelle à la vitesse, l'amplitude α décroît comme $e^{-\frac{Rt}{2I}}$ en appelant I le moment

$$(1) \quad \frac{\partial^2(\alpha + \beta)}{\partial t^2} + \frac{4\pi^2\alpha}{T_0^2} = \frac{C_1}{I}$$

β angle de rotation de l'appareil.

$\pm \alpha_1$ jeu du levier.

C_1 couple fourni par les butoirs.

La condition est

$$-\alpha_1 < \alpha < \alpha_1, \quad C_1 = 0,$$

d'où

$$-\frac{4\pi^2\alpha_1}{T_0^2} < \frac{\partial^2(\alpha + \beta)}{\partial t^2} < \frac{4\pi^2\alpha_1}{T_0^2}.$$

d'inertie. Le retour au zéro est le plus rapide lorsqu'on a

$$\frac{R}{2I} = \frac{2\pi}{T_0}.$$

Au bout d'une période, T_0 , l'amplitude est réduite à $e^{-2\pi}$ ou 0,00186, soit sensiblement 0,002; à 0,00008 et 0,000004 au bout d'une période et demie et de deux périodes ou 20 minutes.

Au bout d'un dixième de période l'amplitude est réduite à 0,53.

Dans mon appareil, à partir du moment où les chocs ont cessé, l'amplitude est environ 0,03; 10 minutes plus tard, l'amplitude peut être réduite à 0,00006 ou 12 secondes et à 0,0000026 au bout de 15 minutes, soit une demi-seconde d'arc.

Pendant la période des chocs, la vitesse reste constamment grande, changeant brusquement de signe au moment du choc. Si la vitesse était constante, l'exposant serait double de celui qui correspond au mouvement amorti; ce n'est que dans des cas très défavorables que l'amplitude initiale pourrait atteindre 0,3; deux ou trois minutes doivent suffire à la réduire au dixième, et à supprimer les chocs.

Ainsi par un réglage convenable de la résistance, on doit réduire les chocs à un ou deux, lorsqu'on n'abandonne pas le levier trop brusquement, ou même les éviter tout à fait; ramener au bout de 7 ou 8 minutes l'élongation à une centaine de divisions, et à l'équilibre pratique à partir de la quinzième minute. C'est bien en effet ce que j'ai réussi à obtenir; toutes les fois que l'équilibre s'établit bien, la position reste pratiquement fixe à la seconde près après la quinzième minute.

B. AMORTISSEMENT.

Le seul mode d'amortissement qui ne change pas la position d'équilibre, et ne fasse pas intervenir d'actions nouvelles susceptibles de varier d'une manière difficile à définir, est l'amortissement par l'air, tel que l'a imaginé P. Curie dans sa balance apério-

dique⁽¹⁾. C'est celui que j'ai adopté après quelques essais et dont j'ai été très satisfait. Il n'est pourtant pas lui-même complètement dépourvu d'inconvénients que j'aurais pu prévoir, et auxquels je remédierai facilement; les moindres inégalités de température produisent dans les espaces à peu près clos destinés à l'amortissement des différences de pression, très petites il est vrai, mais suffisantes pour troubler un peu le zéro, et qui ne s'équilibrent que très lentement. Lorsque la marche du zéro qui en résulte est lente, cet inconvénient est compensé par sa régularité, mais cela n'arrive pas toujours.

Le balancier est terminé par deux disques verticaux (fig. 3), autour de chacun desquels se trouve un tube cylindrique horizontal, assez court pour se confondre avec un segment de tore. Lorsque le balancier tourne autour du fil de suspension vertical, ces cylindres se meuvent chacun à l'intérieur d'une enveloppe cylindrique fixe, d'un diamètre très peu supérieur, close à ses deux extrémités (pl. I, n° 3). L'air doit passer d'un côté à l'autre du disque mobile à travers l'espace étroit compris entre les deux cylindres; l'excès de pression nécessaire pour surmonter la résistance due à la viscosité de l'air ralentit le mouvement du balancier.

Soit $2R$ le diamètre intérieur d'un des cylindres mobiles, h sa longueur, e l'épaisseur comprise entre le cylindre mobile et le cylindre fixe, et V le volume compris d'un côté du disque mobile jusqu'aux parois fixes dans la position moyenne du balancier.

Le déplacement $x = l\alpha$ du disque est sensiblement rectiligne.

Dans une position x , le volume est, du côté des x positifs, $V - \pi R^2 x$, de l'autre $V + \pi R^2 x$; la pression est $P - p$, et $P + p$. L'écoulement de l'air est à chaque instant sensiblement permanent et comme les variations relatives de densité de l'air sont négligeables, on peut écrire comme pour un liquide entre plans parallèles

$$2p = 12 \frac{\mu h}{2\pi R e^3} D, \quad \text{ou} \quad p = \frac{6\mu h}{\pi R e^3} D,$$

⁽¹⁾ *Journal de Physique*, 4^e série, t. IX, 1890, p. 149.

en appelant D le débit en volume, à la pression et à la température moyennes P, Θ ; la masse qui passe du côté négatif au côté positif en 1 seconde est $D \frac{M}{V}$, si l'on appelle M la masse contenue dans le volume V à la pression et à la température moyennes.

Soient $\Theta - \theta, \Theta + \theta$ les températures absolues, $M - m, M + m$ les masses contenues de part et d'autre du disque, on a, à cause de l'extrême petitesse des écarts,

$$\frac{m}{M} = \frac{p}{P} + \frac{\pi R^2 x}{V} - \frac{\theta}{\Theta},$$

et en dérivant par rapport au temps

$$-\frac{D}{V} = \frac{1}{P} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\pi R^2}{V} \frac{\partial x}{\partial t} - \frac{1}{\Theta} \frac{\partial \theta}{\partial t}.$$

L'équation finale du mouvement est

$$(1) \quad \frac{1}{V} \left[\pi R^2 \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\pi R e^3}{3 \mu h} p \right] + \frac{1}{P} \frac{\partial p}{\partial t} - \frac{1}{\Theta} \frac{\partial \theta}{\partial t} = 0.$$

Supposons d'abord que $\frac{\partial p}{\partial t}$ et $\frac{\partial \theta}{\partial t}$ sont négligeables; nous retombons sur la formule admise par Curie, dans laquelle l'excès de pression est directement proportionnel à la seule vitesse⁽¹⁾ et qui

⁽¹⁾ En réalité l'évaluation de la résistance exige quelques précautions; l'action exercée sur le levier se compose en effet de la différence des pressions exercées sur les disques, et de l'action tangentielle exercée par le gaz qui s'écoule dans l'espace annulaire sur celle des deux parois qui est mobile avec le disque.

Nous supposons l'aire de l'espace annulaire petite par rapport à la surface des disques; dans ces conditions la vitesse générale de l'air dans l'espace

annulaire est beaucoup plus grande que celle des disques, et on peut évaluer l'action tangentielle sur le cylindre en négligeant la vitesse propre du cylindre. Cette action tangentielle totale est alors sensiblement la moitié de la résistance et, par conséquent, de la force motrice c'est-à-dire

$$\frac{1}{2} \cdot 2p \cdot 2\pi Re, \text{ ou } p \cdot 2\pi Re;$$

elle agit dans le même sens que l'excès de pression, lorsque le cylindre fixe est

donne pour la résistance totale (en ayant égard aux deux extrémités du balancier)

$$(2) \quad 2 \times 2p \cdot \pi R^2 = -12 \mu h \pi \frac{R^3}{e^3} l \times \frac{\partial \alpha}{\partial t}$$

où l'on doit prendre aux températures ordinaires $\mu = 0,00019$ (C. G. S.) sensiblement.

La valeur la plus favorable aux lectures rapides est

$$12 \mu l h \cdot \pi \frac{R^3}{e^3} = \frac{4\pi I}{T_0}.$$

Dans mon appareil, j'ai adopté sensiblement

$$R = 2, \quad h = 2,6, \quad l = 14,5$$

avec

$$T_0 = 600, \quad I = 20000;$$

l'épaisseur que donne alors la formule est

$$e = 0^{\text{cm}} 174,$$

qui laisse encore un jeu très suffisant. Il faut en effet d'abord éviter tous les frôlements des parties mobiles contre les parties fixes, sans être astreint à un centrage minutieux du fil de torsion; il faut aussi que les cylindres mobiles restent sensiblement concentriques

uniquement extérieur, comme dans mon appareil; il convient alors de prendre pour surface soumise à la pression $2p$, non pas πR^2 , mais $\pi(R^2 + Re)$, c'est-à-dire de compter la surface jusqu'au milieu de l'espace annulaire.

Dans le dispositif de Curie, où il y a

deux parois cylindriques fixes, l'une extérieure et l'autre intérieure au cylindre mobile, les mouvements de l'air le long des deux faces du cylindre mobile sont de sens contraire et leurs actions tangentielles se compensent; Curie n'a pas eu à s'en occuper.

aux cylindres fixes pour que l'amortissement soit toujours le même, et maximum; la résistance diminue lorsque les cylindres sont sensiblement décentrés; c'est là une des raisons qui rendent utile de niveler assez soigneusement l'appareil.

L'épaisseur à laquelle je me suis arrêté après un certain nombre d'essais est $0^{\text{cm}}42$.

Rayon intérieur des cylindres fixes $2,50^{\text{cm}}$

Rayon extérieur des cylindres mobiles $2,08^{\text{cm}}$

Discussion. — Revenons à l'équation générale (1), supposons la température uniforme et le balancier immobile ($\theta = 0$, $\alpha = 0$); et voyons avec quelle rapidité une inégalité de pression disparaît d'elle-même :

$$\frac{1}{V} \frac{\pi R e^3}{3 \mu h} p + \frac{1}{p} \frac{\partial p}{\partial t} = 0.$$

Dans mon appareil, le volume V est à peu près 38 centimètres cubes. Avec l'épaisseur e qui vient d'être indiquée ($0,42$ centim.), et pour une pression moyenne de 1 atmosphère ($P = 10^6$), cela donne

$$\frac{\pi R e^3}{3 \mu h V} = 8,3, \quad p = p_0 e^{-8,3 \cdot 10^6 t}.$$

L'hypothèse de l'écoulement lent qui a servi de base au calcul n'est évidemment pas applicable à une variation aussi prodigieusement rapide; concluons seulement que toute inégalité de pression non entretenue par une cause extérieure ou par le mouvement du balancier disparaît en quelques centièmes de seconde. Il n'y a donc aucun trouble du zéro à craindre de ce côté.

Il n'en est plus de même s'il existe au dehors des causes de trouble dissymétrique de la pression ou de la température, car, par suite de la sensibilité de l'appareil, un excès de pression prodi-

gieusement petit suffirait à produire une torsion sensible. Pour 1 seconde d'arc il suffirait d'un excès

$$2p = \frac{C}{\pi R^2} \frac{1}{200000} = 0,8 \cdot 10^{-6}, \quad (C = 2),$$

soit 10^{-12} atmosphère. Malgré tous les soins apportés à la construction, il est difficile d'obtenir une symétrie parfaite; supposons par exemple que pour les échanges avec l'atmosphère extérieure la résistance de l'une des moitiés de la boîte cylindrique surpasse l'autre de 1 p. 100 et que la pression extérieure \mathcal{P} soit variable; on aura d'un côté sensiblement

$$p_1 = \frac{0,995}{P\mathcal{R}} \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial t}, \quad \text{et de l'autre} \quad p_2 = \frac{1,005}{P\mathcal{R}} \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial t},$$

d'où

$$p_2 - p_1 = \frac{0,01}{P\mathcal{R}} \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial t},$$

en appelant \mathcal{R} la résistance aux échanges avec l'intérieur. Cette résistance dépend de la forme des ouvertures qui laissent passer le balancier; elle est de même ordre que la résistance déjà calculée, 8,3, d'un côté à l'autre des disques. La différence de pression $p_2 - p_1$ est alors de l'ordre de $10^{-9} \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial t}$. Une variation extérieure $\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial t}$ de l'ordre de 1000, soit environ $\frac{1}{20}$ d'atmosphère par minute, serait nécessaire pour maintenir une déviation permanente de 1 seconde. Quelle que soit l'incertitude sur la résistance \mathcal{R} , aucune variation naturelle de la pression extérieure ne peut certainement jouer un rôle.

C. VARIATIONS DE TEMPÉRATURE.

Si la température varie inégalement vite des deux côtés du disque, on a

$$\frac{1}{V} \frac{\pi R e^3}{3 \mu h} p - \frac{1}{\Theta} \frac{\partial \theta}{\partial t} = 0,$$

ou, dans mon appareil, vers 17 degrés centigrades ($\Theta = 290$),

$$p = \frac{1}{8,3 \cdot 290} \frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{1}{2400} \frac{\partial \theta}{\partial t}.$$

Pour que le trouble qui en résulte ne dépasse pas 1 seconde, il faut que l'on ait

$$p < 10^{-6}, \quad \frac{\partial \theta}{\partial t} < 2400 \cdot 10^{-6},$$

la différence de température ne doit pas varier de 0°0024 par seconde, ou 0°144 par minute. C'est pendant les variations de température qu'il importe d'obtenir la même rapidité de variation sur les deux faces. Lorsque la variation provient du transport de l'appareil d'une station à une autre (avec distribution uniforme de la température dans chacune des stations), la variation de la température générale Θ peut n'être accompagnée que de variations dissymétriques θ très petites; toutefois, si le réchauffement est de 25 degrés à 30 degrés en moins d'une heure, comme à la station 8 du Simplon (côté Brigue), il ne faudra pas s'étonner d'un déplacement progressif notable du zéro. Lorsque la source de chaleur est unilatérale, l'effet peut devenir énorme, malgré les précautions prises pour uniformiser la température; c'est ce qui arrive lorsque les rayons solaires tombent d'un côté, sur l'une des extrémités de l'appareil, même quand ils sont tamisés par un store ou par la toile d'une tente; on obtient une protection suffisante par une double tente, formée de deux toiles tendues à 25 centimètres l'une au-dessus de l'autre.

Il est facile de mettre en évidence cette influence d'une dissymétrie dans la température extérieure. J'ai placé à 40 centimètres au-dessous de l'appareil un bec Bunsen entouré d'une très large cheminée rectangulaire de tôle, de façon que les gaz de la combustion lèchent l'angle de l'appareil à droite, en avant de l'observateur, toutes les enveloppes protectrices étant en place.

(MERCREDI 7 MAI 1906).

OBSERVATIONS.

De IX ^h 6 ^m à IX ^h 19 ^m . 1237		Équilibre.	(fixe).
20.	Allumage du gaz.	En me déplaçant pour allumer le gaz, j'ai exercé une petite action newtonienne dont la première amplitude était — 8 divisions et qui s'est rapidement éteinte.	
IX 25	1240		
30	1231		
35	1195		
40	1144		
IX 40	Extinction du gaz.		
45	1087		
50	1052	Minimum, 10 minutes après l'extinction.	
55	1067	La marche lue de minute en minute est très régulière.	
X 0	1112		
5	1169		
10	1218		
15	1252	La position d'équilibre initiale a été franchie à X 2.	
20	1276		
25	1287		
30	1292	Très long maximum.	
35	1290		
40	1287	Le côté opposé de l'appareil avait continué à se réchauffer par conductibilité pendant que le côté primitivement exposé à la source commençait à se refroidir.	
50	1276	Il s'est écoulé environ 40 minutes entre le maximum d'effet direct et le maximum inverse.	
XI 00	1268		
10	1260		
20	1257		
30	1253		
40	1253		
50	1253		
Après midi.			
II 41	1234	Le zéro initial 1237 est très sensiblement retrouvé.	
53	1236		
Lendemain jeudi.			
X 42	1241	Le support du bec de gaz a été transporté de l'autre côté.	
X 53	1241		

Le mouvement se produit en sens contraire, mais est d'ailleurs tout semblable, lorsque les gaz chauds lèchent une face opposée de l'appareil. Cette expérience montre la bonne protection de

l'appareil, car, pour obtenir ces déplacements rapides, 10 divisions par minute, pendant le chauffage, il a fallu employer ce mode d'action extrêmement violent (les gaz de la combustion sont à plus de 100 degrés). Néanmoins, cette action poursuivie pendant 20 minutes a produit une marche régulière qui n'a pas dépassé — 185 divisions (1237 — 1052) au bout de 30 minutes, et + 55 divisions (1292 — 1237), 40 minutes plus tard.

La régularité de la marche de la frange dès le début, et même à la suite du changement brusque extérieur produit par l'extinction, montre qu'il est tout à fait légitime de corriger de la marche du zéro pendant une série d'observations, même lorsqu'elle est assez rapide, d'après les positions que donnent les lectures à 90 degrés d'azimut.

Cette régularité est évidemment due à la masse métallique considérable des parois, qui emmagasine la chaleur extérieure lentement à cause de la protection par les caisses de bois et les enveloppes polies, et qui la restitue lentement à la masse d'air intérieure; aussi le brassage exercé par les oscillations du levier pendant les changements d'azimut ne peut-il exercer qu'une action minime sur la marche du zéro due aux sources extérieures.

CHAPITRE V.

MESURE DES PETITS ANGLES.

La durée d'une expérience dans chaque azimut avec un balancier convenablement amorti est proportionnelle à sa période et, par conséquent, à la racine carrée de la sensibilité de l'arrangement optique, pour la mesure des angles.

D'après les résultats obtenus en diverses stations par M. Eötvös, il m'a semblé inutile de dépasser en sensibilité le dixième environ de l'effet de l'ellipsoïde général; et j'ai cherché à obtenir ce résultat en mesurant les angles à 1 seconde près sans trop d'encombrement, par le procédé dont j'ai déjà parlé, fondé sur la double réfraction du spath.

Je ne discuterai pas ici les procédés d'optique géométrique pure; j'ai indiqué ailleurs⁽¹⁾ combien ils seraient plus encombrants.

A. PRINCIPE DE LA MESURE DES PETITS ANGLES.

La partie essentielle de l'appareil optique pour la lecture des petits angles de rotation est formée par deux lames biréfringentes (spath) à faces parallèles, taillées à 45 degrés de l'axe, S_1 , S_2 , entre lesquelles se trouve une lame $\frac{\lambda}{2}$, orientée à 45 degrés de la section principale des lames biréfringentes, de manière à inverser le faisceau ordinaire et le faisceau extraordinaire. La lumière incidente est polarisée par un nicol à 45 degrés des sections principales; à la sortie elle est analysée par un autre nicol en croix avec le premier.

⁽¹⁾ *C. R.*, t. CXXXVII, p. 786; 1903.

Les lames S_1 , S_2 , étant parallèles entre elles et égales, se compensent rigoureusement grâce à la lame $\frac{\lambda}{2}$; l'extinction est rigoureuse.

Mais si l'une des lames S_1 tourne d'un petit angle autour d'une normale à la section principale, l'ensemble équivaut à une lame mince d'épaisseur uniforme, d'autant plus grande que l'angle de rotation est plus grand. L'extinction est remplacée par une coloration.

Remarquons d'abord que, quel que soit le mode d'observation, la distribution des couleurs a un plan de symétrie; de quelque façon qu'on les observe, les franges sont normales à la section principale commune des deux spaths.

En outre, si les deux spaths sont bien identiques, le retard est la même fonction de l'incidence dans les deux.

Supposons d'abord qu'on observe à l'infini. Si le retard dépend linéairement de l'incidence, la différence des retards dans les deux lames est indépendante de l'incidence, la teinte est uniforme; elle est pure si l'épaisseur des spaths est uniforme dans la région traversée par la lumière; il est bon pour cela d'éliminer par un diaphragme une largeur d'environ 1 millimètre tout autour de chaque spath.

Si le retard contient un terme proportionnel au carré de l'incidence, il reste, dans la différence des retards des deux lames, un terme proportionnel à l'incidence; le retard croît un peu d'un bord à l'autre du champ, la teinte n'est pas rigoureusement plate. Un semblable terme existe en réalité⁽¹⁾; mais il est petit, et on peut

⁽¹⁾ Comme nous le verrons plus loin, le retard est dans une très grande étendue représenté par

$$e\delta i(0,110 - 0,035i),$$

quelle que soit la taille des spaths voisine de 45 degrés, pour la raie E, de longueur d'onde 0,527 et toute la partie brillante du spectre.

Pour un retard d'une frange, sous l'incidence normale

$$e\delta i \times 0,110 = \lambda,$$

le retard augmente d'un dixième de frange sous l'incidence $-\frac{35}{110} \cdot \frac{1}{10}$, environ 2 degrés.

Lorsque l'axe fait avec la normale un

d'ailleurs tailler les spaths de manière à l'annuler (angle de 54 degrés entre l'axe et la normale) comme nous le verrons plus loin.

Donc, en visant à l'infini, la teinte est plate et pure.

Supposons maintenant que l'on pointe au milieu de la distance des spaths, sur la lame $\frac{\lambda}{2}$. Puisque le retard total ne dépend pas de l'incidence dans un champ étendu, on peut observer chaque point de la lame avec une grande ouverture, sans nuire à la pureté de la coloration. On pourra donc observer avec un faisceau ouvert, c'est-à-dire employer une faible source de lumière.

Si les lames ont une épaisseur bien uniforme, et sans avoir à se préoccuper du parfait parallélisme des axes des faisceaux qui proviennent des différents points de la lame, tous ces points donneront le même retard, donc la même teinte plate.

Si les lames ont des épaisseurs inégales, des variations de teinte en résulteront.

D'après ces deux résultats relatifs à la mise au point à l'infini et à très courte distance, nous voyons que la teinte plate observée ne dépend sensiblement pas de la mise au point.

Ajoutons que la teinte n'est pas modifiée par une translation quelconque des spaths; elle n'est pas modifiée non plus par de petites rotations autour d'un axe quelconque situé dans la section principale.

Cette combinaison optique est très sensible à une rotation d'un seul des deux spaths autour d'un axe perpendiculaire à sa section principale; elle est insensible aux onze autres déplacements ou rotations possibles.

Elle permet l'emploi de faisceaux larges et ouverts, c'est-à-dire de faibles sources de lumière et de viseurs courts.

angle d'environ 54 degrés, le terme linéaire disparaît, et les franges par changement d'incidence s'éloignent beaucoup plus. Pour un retard de 10 franges (au lieu d'une) le retard

reste constant à un dixième de frange près dans une étendue angulaire de

$$\pm 25 \text{ degrés.}$$

C'est un champ de pureté énorme.

En pratique, les spaths doivent être taillés avec le plus grand soin; les premiers que j'ai employés en 1882 m'avaient été fournis par Laurent; ceux qui me servent actuellement ont été taillés par Jobin.

La plus grande imperfection provient de la surface des spaths, en conséquence il est avantageux de pointer à petite distance des spaths, pour que les faisceaux qui les traversent soient très étroits, et de n'utiliser que leur partie centrale. Pour avoir un repère bien défini, j'ai placé avant le premier spath un compensateur de Babinet à franges verticales, avec deux traits fins sur lesquels on met au point et entre lesquels on ramène constamment la frange achromatique pour les mesures.

Remarquons que, le retard dépendant très peu de l'incidence, il n'est nullement nécessaire de fixer avec précision la position de ce compensateur (muni de ses traits de repère), il suffit qu'il soit dans le champ, à quelques minutes près.

Pour compenser la rotation du spath mobile, j'ai interposé sur le trajet du faisceau lumineux, entre le Babinet et le premier spath, une lame de quartz de 7 millimètres d'épaisseur, taillée à 45 degrés de l'axe, et que la lumière traverse normalement, et au delà du dernier spath, une seconde lame identique, mais mobile autour d'un axe parallèle au fil de torsion. Ce système de deux quartz fonctionne comme le système de deux spaths; et si tous les axes optiques sont sensiblement parallèles, une rotation du premier spath est compensée par une rotation de sens contraire du deuxième quartz, environ 30 fois plus grande, car la biréfringence du quartz n'est que $\frac{1}{19}$ de celle du spath, et son épaisseur est les $\frac{7}{10}$. La rotation du quartz sera donc très facile à mesurer. Cet avantage est compensé par un inconvénient. A une rotation du spath de 1 degré correspond une rotation du quartz d'une trentaine de degrés. La différence de marche due au quartz est loin d'être proportionnelle à l'angle dont il tourne, il faut donc l'étalonner, soit théoriquement, soit par expérience; j'ai employé les deux méthodes et constaté leur accord.

Notons que l'incidence générale sur les deux lames de quartz peut varier dans d'assez larges limites sans changer le retard.

Ainsi, pourvu que le spath fixe soit relié rigidement au point d'attache du fil de torsion, on peut déplacer le Babinet et l'ensemble des deux quartz, dans une étendue de quelques degrés, sans que la frange du Babinet se déplace.

Bien entendu, la liberté n'est pas moindre pour les nicols et pour les lunettes-viseurs. En un mot, le réglage des spaths et de la lame $\frac{\lambda}{2}$ exige seul des précautions.

J'ai profité de cette latitude dans la construction de l'appareil, comme on le verra au chapitre VI.

Remarques. — Il importe d'employer une lame $\frac{\lambda}{2}$ excellente, choisie pour le jaune moyen (épaisseur, en quartz parallèle : 30^{μ}) et non pour les raies D. Il ne faut pas non plus une lame $\frac{3\lambda}{2}$, trop dispersive en lumière blanche. Les lames clivées de mica ne sont jamais assez uniformes.

La première lame de quartz est indispensable pour l'achromatisme de la frange centrale.

Le mouvement de rotation de la seconde lame de quartz est un mouvement parfaitement doux, sans grippements; il permet d'utiliser toujours la même partie de la lame de quartz, il n'y a donc pas d'irrégularité brusque à craindre dans la graduation; cela compense largement l'ennui qui en résulte.

En revanche, l'achromatisme de la frange ne se conserve pas rigoureusement, et les franges deviennent très mauvaises, à cause de la polarisation rotatoire, quand on approche trop de l'axe; mais il y a assez de marge pour les mesures sans cela.

En outre, la rotation de cette lame de quartz épaisse produit un petit déplacement latéral du repère, vers les bords du champ, qui ne gêne d'ailleurs pas l'observation, ni la théorie générale, et n'intervient même qu'à titre de correction presque négligeable dans la graduation théorique du quartz en fonction de l'incidence.

Ce dernier inconvénient serait évité par l'emploi d'un compensateur à prismes opposés donnant une teinte plate; on éviterait aussi l'influence de la polarisation rotatoire, mais on ne gagnerait rien sur l'achromatisme. En revanche, la translation de l'un des prismes fait changer la région utilisée, et l'incertitude sur l'homogénéité exigerait toujours une graduation expérimentale, rendue bien plus incertaine par la possibilité de changements brusques localisés; rien n'est plus fréquent, même dans de très beaux échantillons de quartz. Enfin, la compensation par les prismes n'est pas elle-même sans inconvénient au point de vue de l'uniformité du champ.

B. THÉORIE DES FRANGES EMPLOYÉES À LA MESURE DES PETITS ANGLES.

Prenons pour plans de référence le plan de la face d'entrée yz et le plan de la section principale (xy) ; soit α l'angle de l'axe avec la normale ox à la face d'entrée.

Définissons l'onde plane incidente par l'angle i de sa normale

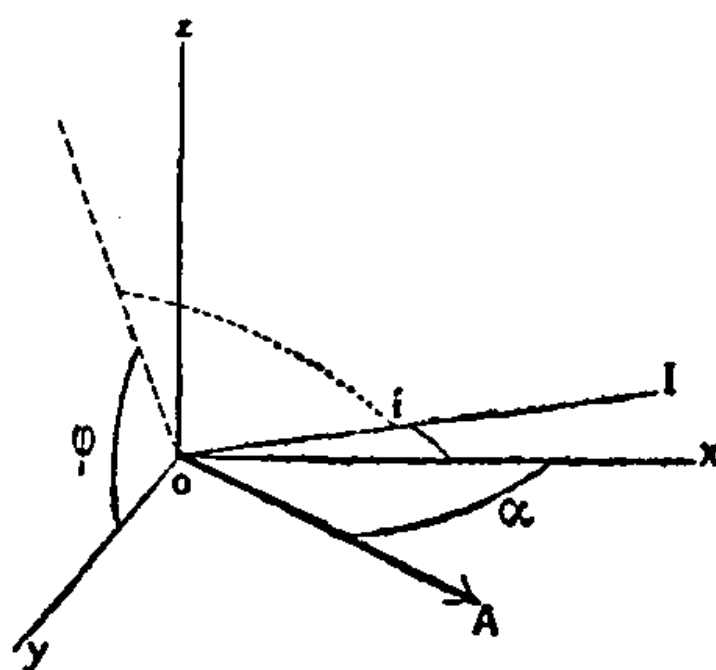


Fig. 9.

avec la normale ox à la face d'entrée et son azimut φ dans le plan yz de cette face.

Définissons de même l'onde réfractée ordinaire O et l'onde réfractée extraordinaire E , qui ont même azimut φ que l'onde incidente.

Les cosinus directeurs de ces normales sont :

$$\text{Onde} \left\{ \begin{array}{llll} \text{incidente} & \cos i & \sin i \cdot \cos \varphi & \sin i \cdot \sin \varphi \\ \text{réfractée O} & \cos i_0 & \sin i_0 \cdot \cos \varphi & \sin i_0 \cdot \sin \varphi \\ \text{réfractée E} & \cos i_E & \sin i_E \cdot \cos \varphi & \sin i_E \cdot \sin \varphi \end{array} \right.$$

Soient a et b les vitesses de propagation principales de l'onde extraordinaire (a) et ordinaire (b), en prenant pour unité la vitesse de propagation dans le vide.

Les angles i_0 , i_E sont déterminés, comme on sait⁽¹⁾, par les équations

$$\sin i_0 = b \sin i,$$

$$\sin i_E = \sin i \sqrt{a^2 - (a^2 - b^2) \cos^2 \theta},$$

avec

$$\cos \theta = \cos \alpha \cos i_E + \sin \alpha \sin i_E \cos \varphi,$$

d'où l'on tire

$$(1) \quad \cotg i_0 \sin i = \frac{1}{b} \sqrt{1 - b^2 \sin^2 i}$$

et

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} (\cotg i_E \sin i)^2 (a^2 \sin^2 \alpha + b^2 \cos^2 \alpha) \\ - 2 (\cotg i_E \sin i) (a^2 - b^2) \sin \alpha \cos \alpha \cos \varphi \sin i \\ + [a^2 - (a^2 - b^2) \sin^2 \alpha \cos^2 \varphi] \sin^2 i - 1 \end{array} \right\} = 0.$$

Si la face de sortie est exactement parallèle à la face d'entrée, le retard du rayon extraordinaire sur le rayon ordinaire est

$$(3) \quad O - E = \varepsilon [\cotg i_0 \sin i - \cotg i_E \sin i],$$

en appelant ε l'épaisseur de la lame.

⁽¹⁾ Voir, par exemple, VERDET, *Optique physique*, t. II, p. 115.

Au moyen des équations 1, 2, développons le second membre par rapport à i ; pour cela, posons

$$A = \frac{(a^2 - b^2) \sin \alpha \cos \alpha}{a^2 \sin^2 \alpha + b^2 \cos^2 \alpha};$$

$$B = \frac{a^2 - (a^2 - b^2) \sin^2 \alpha \cos^2 \varphi}{a^2 \sin^2 \alpha + b^2 \cos^2 \alpha};$$

$$C = \frac{1}{a^2 \sin^2 \alpha + b^2 \cos^2 \alpha}.$$

L'équation (2) donne

$$\cotg i_E \sin i = A \cos \varphi \sin i + \sqrt{C} \sqrt{1 + \frac{A^2 \cos^2 \varphi - B}{C} \sin^2 i}.$$

La seconde racine $(-\sqrt{C} \sqrt{\dots})$ ne convient évidemment pas; car, pour $i = 0$, le retard doit se réduire à $(\frac{1}{b} - \sqrt{C})$.

On a alors

$$(4) \quad O - E = \varepsilon \left[\frac{1}{b} - \sqrt{C} - A \cos \varphi \sin i - \frac{\sin^2 i}{2} \left[b + \frac{A^2 \cos^2 \varphi - B}{\sqrt{C}} \right] + \dots \right]$$

en négligeant seulement les termes en $\sin^4 i$,

Si les deux spaths sont placés l'un derrière l'autre, avec interposition d'une lame demi-onde dans un azimuth de 45 degrés, qui échange les rayons ordinaire et extraordinaire, et si les sections principales sont bien parallèles, l'incidence i différant seule, et très peu, les retards se retranchent :

$$(5) \quad \delta(O - E) = -\varepsilon \left[A \cos \varphi + \sin i \left(b + \frac{A^2 \cos^2 \varphi - B}{\sqrt{C}} \right) + \dots \right] \cos i \cdot \delta i.$$

MAXIMUM DE SENSIBILITÉ. — Cherchons quel doit être l'angle α pour avoir le maximum de sensibilité sous l'incidence normale.

L'expression (5) se réduit alors à

$$\delta(O - E) = -\varepsilon \cdot A \cos \varphi \cdot \delta i, \quad (i = 0);$$

la rotation δi , que l'on peut apprécier au moyen d'un même retard, est d'autant plus petite que $A \cos \varphi$ est plus grand.

Il faut donc que le plan d'incidence soit dans la section principale ($\varphi = 0$), comme c'était évident à l'avance, et en outre que l'angle α rende A maximum, ou son inverse minimum.

Il faut donc rendre minimum

$$\frac{a^2 \sin^2 \alpha + b^2 \cos^2 \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha},$$

ou encore

$$a^2 \operatorname{tg} \alpha + \frac{b^2}{\operatorname{tg} \alpha};$$

comme le produit des deux termes est constant le minimum a lieu lorsqu'ils sont égaux, c'est-à-dire lorsqu'on a

$$\operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{b^2}{a^2}, \quad \text{ou} \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{b}{a}.$$

Pour la plupart des cristaux, b diffère si peu de a , en plus ou en moins, que l'on peut adopter $\alpha = \frac{\pi}{4}$. Mais, pour le spath, la différence est sensible; prenons (raie E, 527 μ)

$$b = \frac{1}{1,66354} = 0,60113; \quad a = \frac{1}{1,48885} = 0,67166;$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{0,60113}{0,67166} = 0,89500, \quad \alpha = 41^\circ 50'.$$

Avec le spath, on obtient le maximum de sensibilité sous l'incidence normale, en donnant à l'angle de l'axe avec la normale à la face d'entrée une valeur de $41^\circ 50'$.

L'angle α est fixé par le travail de l'opticien, l'expérimentateur ne peut agir que sur les angles ϕ et i ; supposons toujours que ϕ est nul; et voyons comment la sensibilité varie avec l'incidence générale lorsque l'angle α est défini par

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{b}{a}.$$

On a alors

$$A = \frac{a^2 - b^2}{2ab}, \quad B = \frac{a^4 + b^4}{2a^2b^2}, \quad C = \frac{a^2 + b^2}{2a^2b^2},$$

$$\delta(O - E) = -\varepsilon \delta i \cdot \cos i \left[\frac{a^2 - b^2}{2ab} + \sin i \left(b - \frac{a^2 + b^2}{2ab} \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \right) + \dots \right].$$

Pour le spath,

$$\delta(O - E) = -\varepsilon \delta i \cos i [0,11115 - 0,037 \sin i + \dots].$$

Comme le développement n'est valable que pour les petits angles, ce facteur de δi équivaut à

$$0,11115 - 0,037 i - 0,055 i^2 \dots$$

Cette expression diminue constamment pour les incidences positives; elle croît au contraire pour les petites incidences négatives, et passe par un maximum pour

$$i = -\frac{37}{111} = -0,334 \text{ environ,}$$

ou

$$i = -20 \text{ degrés,}$$

et cette sensibilité maximum est égale à $0,11115 + 0,0061$, c'est-à-dire supérieure de $0,0054$ (soit $\frac{11}{2000}$) à la sensibilité sous l'incidence normale.

Cette incidence est trop différente de zéro pour être exactement déterminée par ces formules approchées; mais l'existence du maximum est évidente *à priori*.

Ce qui est bien déterminé, c'est la loi de variation de la sensibilité avec l'incidence au voisinage de l'incidence normale.

On voit qu'il y a là deux conditions de maximum très différentes, l'une de l'autre, l'une relative à l'axe, sous l'incidence normale, l'autre relative à l'incidence pour une taille donnée de cristal.

SENSIBILITÉ UNIFORME. — Au lieu de rechercher la sensibilité maximum sous l'incidence normale, on peut trouver plus avantageux de rendre la sensibilité indépendante de l'incidence au voisinage de l'incidence normale. L'expression (5) montre que cette condition est remplie si l'on détermine α par l'équation

$$b + \frac{A^2 - B}{\sqrt{C}} = 0,$$

en adoptant toujours $\phi = 0$.

Substituons les valeurs de A , B , C , et effectuons quelques réductions évidentes, il vient

$$(a^2 \sin^2 \alpha + b^2 \cos^2 \alpha)^{\frac{3}{2}} = a^2 b.$$

Développée et ordonnée en $\cos^2 \alpha$, cette équation devient

$$-1 + 3 \cos^2 \alpha + 3 \frac{b^2 - a^2}{a^2} \cos^4 \alpha + \left(\frac{b^2 - a^2}{a^2} \right)^2 \cos^6 \alpha = 0.$$

Pour la plupart des cristaux, b diffère assez peu de a pour qu'on puisse adopter

$$\cos \alpha = \sqrt{\frac{1}{3}} \quad \text{soit} \quad \alpha = 55^\circ.$$

Pour le spath, les valeurs de a et b citées plus haut donnent

$$-1 + 3 \cos^2 \alpha - 3 \times 0,195 \cos^4 \alpha + (0,195)^2 \cos^6 \alpha = 0,$$

d'où l'on tire

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{3} + 0,0243 = 0,3576,$$

$$\cos \alpha = 0,598, \quad \alpha = 53^\circ 5;$$

c'est une différence assez minime.

On a alors

$$\delta(O - E) = -\varepsilon A \cos i \delta i$$

et, dans une étendue angulaire de $\pm 2^\circ 5$, au millième près

$$\delta(O - E) = -\varepsilon A \delta i$$

avec

$$A = 0,1027.$$

Dans ces conditions, qui facilitent beaucoup l'étalonnage, la sensibilité est encore 0,93 de la sensibilité maxima sous l'incidence normale; il suffit d'augmenter l'épaisseur d'environ $\frac{1}{15}$ pour retrouver une sensibilité choisie à l'avance.

Cette taille a en outre l'avantage de conserver la pureté des franges avec les plus larges faisceaux.

SPATHS TAILLÉS à 45° . — Lorsque le cristal est taillé à 45 degrés de l'axe, on a

$$A = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}, \quad B = \frac{2a^2 - (a^2 - b^2) \cos^2 \varphi}{a^2 + b^2}, \quad C = \frac{2}{a^2 + b^2};$$

et par conséquent

$$\begin{aligned} & \delta(O - E); \\ & = -\varepsilon \cos i \delta i \left[\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \cos \varphi + \sin i \left(b - a^2 \sqrt{\frac{2}{a^2 + b^2}} \left[1 - \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \cos^2 \varphi \right] \right) \right] \end{aligned}$$

et dans la section principale ($\varphi = 0$).

$$\delta(O-E) = -\varepsilon \cos i \delta i \left[\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} + \sin i \left[b - \frac{2a^2 b^2}{a^2 + b^2} \sqrt{\frac{2}{a^2 + b^2}} \right] \right].$$

Lorsque $a^2 - b^2$ est petit, on peut réduire cette expression à

$$\delta(O-E) = -\varepsilon \cos i \delta i \left[\frac{a^2 - b^2}{2b^2} - \sin i \frac{a^2 - b^2}{4b} \right].$$

Pour le spath, il faut conserver l'expression complète, qui donne (raie E)

$$\delta(O-E) = -\varepsilon \cos i \delta i [0,11049 - \sin i 0,0370].$$

La sensibilité est à peine inférieure au maximum, et la variation en fonction de l'angle i est sensiblement la même.

Pour les petits angles d'incidence, le développement équivalent est

$$\delta(O-E) = -\varepsilon \delta i 0,11049 \left(1 - 0,334 i - \frac{i^2}{2} + 0,222 i^3 + \dots \right).$$

Quelque médiocre qu'ait pu être le réglage, l'incidence moyenne ne peut pas dépasser quelques degrés. Voici les valeurs de la parenthèse dans cet intervalle :

TABLEAU I. — INFLUENCE DE L'INCIDENCE SUR LE RETARD (SPATH).

i	(1 — ...)
— 4°.....	1,02092
— 3°.....	1,01612
— 2°.....	1,01106
— 1°.....	1,00568
0°.....	1,00000
+ 1°.....	0,99402
+ 2°.....	0,98774
+ 3°.....	0,98114
+ 4°.....	0,97428

On voit qu'une évaluation même grossière de l'incidence suffit pour étalonner au centième; pour avoir le millième il faut connaître l'incidence à $0^{\circ}2$ près.

Soit δi_0 la rotation au voisinage de l'incidence normale, qui donne le même retard que la rotation δi , sous l'incidence i , on a

$$\delta i_0 = \delta i (1 - 0,334 i - \dots).$$

SPATHS CLIVÉS. — Les faces naturelles du spath peuvent à la rigueur être utilisées; c'est ainsi qu'ont été faits les premiers essais en 1880; mais elles ne sont pas très favorables. L'angle α est alors $63^{\circ}44'30''$, ce qui donne

$$A = 0,0819, \quad B = 0,878, \quad C = 2,300;$$

et

$$\delta(O-E) = -\varepsilon \delta i \cos i [0,0819 + 0,039 \sin i].$$

La sensibilité n'est que les $\frac{3}{4}$ du maximum; l'influence de l'incidence est à peu près la même.

CONCLUSION. — *L'angle le plus avantageux, celui qui donne la sensibilité la plus uniforme, et les franges les plus pures avec de larges faisceaux, est l'angle de 55° entre la normale et l'axe optique pour le quartz et les cristaux peu biréfringents, l'angle de $53^{\circ},5$ pour le spath.*

COMPENSATION. — La mesure de ce retard peut être effectuée, au laboratoire, par divers procédés.

Si on produit le mouvement de rotation d'une manière continue, on peut compter les franges successives en lumière monochromatique; c'est ce que j'ai fait pour diverses expériences de contrôle, soit avec la flamme au phosphate de soude, soit avec la raie verte de l'arc au mercure.

Toujours au laboratoire, on peut éviter de compter les franges, par la méthode des « compléments fractionnaires », avec une source multiple telle que l'arc au mercure ou le tube de Michelson au cadmium.

Mais, en voyage, toute autre source qu'une flamme comporte un matériel trop encombrant, et l'on ne possède pas, à ma connaissance, de flamme colorée favorable à l'application de la méthode des « compléments fractionnaires ». Le plus simple est donc de compenser le retard dû à la rotation de l'un des spaths par un autre phénomène de biréfringence, de manière à pointer toujours la frange noire, de retard sensiblement nul. C'est à cela que servent les deux quartz Q_1 et Q_2 , dont l'un Q_2 tourne autour d'un axe vertical. On a alors, pour la frange de retard nul,

$$\delta(O - E)_{sp} + \delta(O - E)_Q = 0,$$

ou, en accentuant les lettres relatives au quartz,

$$-\varepsilon \delta i \frac{(a^2 - b^2) \sin \alpha \cos \alpha}{a^2 \sin^2 \alpha + b^2 \cos^2 \alpha} = \varepsilon' \delta i' \frac{(a'^2 - b'^2) \sin \alpha' \cos \alpha'}{a'^2 \sin^2 \alpha' + b'^2 \cos^2 \alpha'},$$

tant que les rotations et les incidences restent petites.

J'ai choisi le quartz pour la compensation à cause de sa faible biréfringence et de sa dureté, qualités qui permettent d'employer une lame épaisse, qui rendent la taille facile et précise, et assurent une bonne conservation des surfaces. Toutefois, je pense maintenant qu'il aurait mieux valu employer des lames minces de spath taillées sous le même angle que les lames principales.

L'inconvénient que je redoutais pour les spaths, dont les faces ne sont pas protégées⁽¹⁾, c'était une altération progressive de la sur-

⁽¹⁾ Au centième de longueur d'onde, aucune lame de verre ne serait assez peu trempée, et ne pourrait être collée par un baume assez fluide pour conser-

ver de belles franges; non collée, elle laisserait un espace à peu près clos, à circulation d'air médiocre, plus dangereux peut-être que l'air libre.

face, des piqures, des figures de corrosion, dues à l'humidité. Or après un voyage au Puy-de-Dôme et huit jours de travail dans un brouillard intense, après un voyage au Simplon, et au voisinage des sources chaudes, un ruissellement d'eau abondant pendant plusieurs heures sur tout l'appareil, j'ai pu constater la bonne conservation de toutes les surfaces, et la propreté parfaite de tout l'intérieur de l'appareil, où ni poussière ni humidité n'ont pénétré. Cette crainte était donc chimérique.

L'emploi de deux matières différentes présente un inconvénient réel : les coefficients dépendent de la longueur d'onde, et le rapport

$$\frac{\varepsilon' (a'^2 - b'^2) \sin \alpha' \cos \alpha'}{\varepsilon (a^2 - b^2) \sin \alpha \cos \alpha} \frac{a^2 \sin^2 \alpha + b^2 \cos^2 \alpha}{a'^2 \sin^2 \alpha' + b'^2 \cos^2 \alpha'},$$

qui mesure le rapport de la rotation du spath $\delta i'$ à celle du compensateur δi varie à peu près comme $\frac{a' - b'}{a - b}$, ou $\frac{n_e - n_o}{n'_e - n'_o}$ en fonction de la longueur d'onde. Bien que faible cette variation n'est pas nulle :

λ .	RAIE.	SPATH.	QUARTZ.	$\frac{n_e - n_o}{n'_e - n'_o}$
—	—	—	—	—
656 $\mu\mu$	C	0,16972	— 0,00907	18,72
589	D	0,17192	— 0,00915	18,79
486	F	0,17709	— 0,00931	19,02
431	G	0,18150	— 0,00943	19,25

Le rapport est 18,85 pour la longueur d'onde moyenne 550 $\mu\mu$ d'une flamme incolore, avec une augmentation de 0,023 pour + 10 $\mu\mu$ dans cette région.

Pour toute flamme blanche l'incertitude ne peut donc pas atteindre un millième; il vaudrait mieux néanmoins qu'elle fût nulle.

Un autre inconvénient un peu plus grave, c'est que la frange de retard nul se colore de plus en plus, à mesure que l'angle de rotation augmente. On pointe la région la plus sombre de la

frange; il n'en peut plus résulter d'incertitude notable; toutefois, quand la coloration est bien marquée et qu'on s'efforce de pointer sûrement, il n'est pas bien certain que la position de repère qui donne les pointés les plus réguliers (à moins d'une division près) soit, au même degré de précision, celle qui correspond à une longueur d'onde moyenne bien constante. Je ne crois pourtant pas que les écarts puissent jamais atteindre le millième.

FRANGE ACHROMATIQUE.

La seule source pratique en voyage est une petite lampe à flamme blanche et non une source monochromatique. Le repère est alors fourni par la frange centrale ou, plus exactement, par la frange sombre achromatique ou à peu près. Il faut donc examiner cette question de l'achromatisme des franges employées.

Dans le champ de l'instrument, pour une orientation déterminée i du spath mobile et une orientation déterminée j du quartz compensateur, le retard est

$$\rho = \rho_1 i + \rho_2 j + \rho_0 x,$$

en appelant ρ_1 , ρ_2 , ρ_0 des fonctions des indices du quartz et du spath, qui varient un peu avec la longueur d'onde, par suite de la dispersion de double réfraction; le terme $\rho_0 x$ est dû au compensateur Babinet. L'intensité \mathcal{J} d'une couleur de longueur d'onde λ et d'amplitude incidente A est, comme on sait, entre nicols croisés,

$$\mathcal{J} = A^2 \sin^2 \frac{\pi \rho}{\lambda}.$$

Elle est nulle pour $\rho = 0, \lambda, 2\lambda, 3\lambda, \dots$. Ce sont les franges noires successives que l'on observe en lumière monochromatique.

En lumière blanche, le compensateur de Babinet seul a une

frange noire, achromatique, très nette et fine, entre des franges qui sont toutes colorées. A travers tout le système, il en est à peu près de même; il y a une frange très sombre, qui présente des traces de coloration verte d'un côté, rouge de l'autre, seulement pour les grandes valeurs des rotations, et qui fournit un bon repère. A cause de la symétrie du système de part et d'autre de la lame demi-onde (deux spaths égaux et parallèles, deux quartz égaux et parallèles), il est évident qu'aux déviations nulles la frange noire est encore la frange de retard nul. Quand on dévie la lame de quartz ou le cube de spath et qu'on suit la frange sombre, celle-ci reste très peu colorée, et ce n'est que pour des déviations considérables que l'une des franges pourpres voisines se concentre, et finit par paraître presque aussi peu colorée que la première. Au début aucune hésitation n'est possible, c'est toujours la frange de retard sensiblement nul pour tout le jaune brillant du spectre, qui a servi de repère. Au delà on pourrait hésiter, si l'on ne notait pas la disposition des colorations (rouge à gauche, vert à droite, par exemple). Plus loin encore, l'achromatisme aurait décidément passé plus près de la frange de rang 1, de retard $\lambda (\pm)$ et c'est celle-ci qui fournirait un bon repère, et qu'on choisirait inconsciemment. Ainsi, pour de très grandes déviations, on pourrait être exposé en pointant sur la frange la plus sombre à changer de repère et à se tromper d'une frange tout entière ou d'un nombre entier de franges. Il suffit d'avoir noté à l'avance vers quelles déviations du compensateur l'achromatisme exact a avancé ou reculé d'une frange, de deux franges, etc., et de noter à chaque observation la disposition des filets colorés R et V qui bordent la frange observée, pour savoir sans ambiguïté quel est le rang (0, 1, 2, ...) de la frange sombre que l'on a repérée.

J'insiste sur ce point que l'achromatisme de l'interférence se meut d'une manière continue à travers les franges, mais qu'il ne produit pas seulement une cause d'erreur continue que nous étudierons au chapitre VII; c'est toujours une frange sombre, correspondant à un retard peu différent d'un nombre entier de longueurs

d'onde de la partie la plus brillante du spectre de la source, que l'on prend comme repère; l'incertitude d'un nombre *entier* de franges peut être entièrement évitée par l'étude préalable et la notation des couleurs que j'ai indiquées plus haut.

Pour que l'arrangement proposé soit pratique, il est nécessaire que ce saut d'une frange ne se produise pas trop fréquemment.

Voyons donc quels renseignements la théorie nous fournit à ce sujet, en supposant la lame demi-onde parfaitement achromatique.

La frange observée satisfait sensiblement à la relation

$$\rho_1 i + \rho_2 j + \rho_0 x = n\lambda_0,$$

en appelant n un nombre entier.

La mesure consiste à régler j de manière que x soit nul; on ramène la frange sombre entre les repères de la frange centrale du Babinet :

$$(1) \quad \rho_1 i + \rho_2 j = n\lambda_0, \quad n \text{ entier.}$$

Les franges sombres voisines, en lumière monochromatique λ_0 , se produiraient aux points x_1 , x_{-1} , du champ, définis par

$$\rho_0 x_1 = \lambda_0, \quad \rho_0 x_{-1} = -\lambda_0.$$

L'interférence achromatique se produit lorsque le rapport des intensités dans la teinte transmise est le même que dans la source, c'est-à-dire lorsque $\sin^2 \frac{\pi \rho}{\lambda}$ est indépendant de λ . La condition d'interférence achromatique est donc

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\frac{\rho}{\lambda} \right) = 0, \quad (\lambda = \lambda_0).$$

Cette condition détermine la position x_a de la ligne incolore, d'intensité d'ailleurs quelconque. Pour qu'il n'y ait pas d'hésitation de pointé, il faut que les colorations de la bande noire de repère

soient beaucoup moindres que celles des bandes sombres latérales, c'est-à-dire

$$-\frac{\lambda_0}{2} < \rho_0 x_a < \frac{\lambda_0}{2},$$

i et j étant donnés par (1)

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\frac{\rho}{\lambda} \right) = -\frac{\rho}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda} \left(i \frac{\partial \rho_1}{\partial \lambda} + j \frac{\partial \rho_2}{\partial \lambda} + x \frac{\partial \rho_0}{\partial \lambda} \right).$$

On a donc

$$x_a \left(\rho_0 - \lambda_0 \frac{\partial \rho_0}{\partial \lambda} \right) + i \left(\rho_1 - \lambda_0 \frac{\partial \rho_1}{\partial \lambda} \right) + j \left(\rho_2 - \lambda_0 \frac{\partial \rho_2}{\partial \lambda} \right) = 0,$$

et

$$-\frac{\lambda_0}{2} < -\frac{(\rho_1 - \lambda_0 \rho'_1) i + (\rho_2 - \lambda_0 \rho'_2) j}{1 - \frac{\lambda_0 \rho'_0}{\rho_0}} < +\frac{\lambda_0}{2}$$

en notant les dérivées par des accents.

Éliminant l'un des angles j au moyen de l'équation (1), le rang n de la frange qui sert au pointé est défini par

$$-\frac{1}{2} < -\frac{n \left(1 - \frac{\lambda \rho'_2}{\rho_2} \right) - i \left(\rho'_1 - \rho_1 \frac{\rho'_2}{\rho_2} \right)}{1 - \frac{\lambda \rho'_0}{\rho_0}} < \frac{1}{2}.$$

Cette même inégalité définit les limites entre lesquelles doit rester l'angle à mesurer i , pour que les pointés se fassent tous sans ambiguïté sur une frange de même rang n entier. Examinons le cas le plus important pour nous, celui de la frange de retard nul, $n = 0$:

$$-\frac{1}{2} < \frac{i (\rho_2 \rho'_1 - \rho \rho'_2)}{\rho_2 \left(1 - \lambda \frac{\rho'_0}{\rho_0} \right)} < \frac{1}{2}.$$

$$-\frac{1}{2} < \left(\frac{\rho_1 i}{\lambda} \frac{\left(\frac{\lambda \rho'_1}{\rho_1} - \frac{\lambda \rho'_2}{\rho_2} \right)}{1 - \lambda \frac{\rho'_0}{\rho_0}} \right) < \frac{1}{2}.$$

Les indices du spath et du quartz pour les différentes raies donnent les résultats suivants :

λ	QUARTZ.		SPATH.	
	$n_0 - n_e$	$\frac{\partial(n_0 - n_e)}{\partial\lambda}$	$n_0 - n_e$	$\frac{\partial(n_0 - n_e)}{\partial\lambda}$
C 656	-0,00907	+ 1,60.10 ⁻⁶	0,16972	5,25.10 ⁻⁵
G 431	-0,00943		0,18150	
D 589	-0,00915	+ 1,55.10 ⁻⁶	0,17192	- 5,01.10 ⁻⁵
F 486	-0,00931		0,17709	

La longueur d'onde moyenne du premier intervalle est 543, celle du second 537, toutes deux voisines de 550 adopté pour le milieu du spectre.

Ces valeurs sont probablement un peu fortes pour une source un peu rougeâtre, il faudrait la réduire de près d'un cinquième (un peu plus pour le spath) si le maximum d'éclat de la source tombe au voisinage de la raie D.

On a donc pour les retards au milieu du spectre

	QUARTZ.	SPATH.	BABINET.
$n_0 - n_e$	- 0,00925	+ 0,175	- 0,00925
$(n_0 - n_e)'$	+ 1,6.10 ⁻⁶	- 52.10 ⁻⁶	+ 1,6.10 ⁻⁶
$\frac{1}{2}(n_0 + n_e)$	1,55	1,57	
$\frac{1}{2}(n_0 + n_e)'$	- 56.10 ⁻⁶	- 70.10 ⁻⁶	
$\frac{\rho'}{\rho}$	- 0,000137	- 0,000252	- 0,000173
$\lambda_0 \frac{\rho'}{\rho}$	- 0,075	- 0,138	- 0,095

Ces valeurs portées dans l'inégalité donnent

$$-\frac{1}{2} < \frac{\rho_1^i}{\lambda_0} (-0,057) < \frac{1}{2};$$

$$-8,8 < \frac{-\rho_1^i}{\lambda_0} < +8,8.$$

Cette inégalité montre que l'hésitation devient possible lorsque le retard dû au spath a augmenté ou diminué d'à peu près 9 franges. Au delà, c'est la $(n-1)^e$ frange au lieu de la n^e qui est la moins colorée et, pour des retards de 17, 18, 19 longueurs d'onde, on pointera sans hésiter les 16^e, 17^e, 18^e franges comme incolores; il faudrait alors augmenter d'une longueur d'onde toutes les lectures.

Mais c'est une difficulté qui ne se présentera dans aucune observation, parce que jamais on n'aura au cours d'une même série une telle amplitude. Dans mon appareil, en tous cas, la course de la vis micrométrique ne permet de pointer que 18 à 20 franges et, quand la frange est à peu près achromatique au milieu de la course, l'hésitation est impossible dans toute son étendue. Ces limites seront d'autant plus étendues que la flamme est plus rouge.

Tels sont les résultats du calcul. Comparons-les à l'observation, qui est très facile, avec l'arrangement qui sera décrit au chapitre VII pour l'étalonnage expérimental direct en angles.

On a trouvé ainsi⁽¹⁾ (nicols croisés) que l'achromatisme est excellent lorsque le quartz est serré au zéro et la vis micrométrique vers 1100. En faisant tourner à la fois le spath mobile (Sp_1) et le quartz Q_2 ⁽²⁾ en sens inverse des aiguilles d'une montre (sens négatif) la frange la plus sombre devient verte à gauche et rouge à droite, ce que j'ai fréquemment noté sur mes calepins V | R. Vers la 16^e frange seulement, la frange à droite dans le champ (R | V), qui

⁽¹⁾ Avec la lampe à mélange d'huile et de pétrole (flamme sensiblement rouge). —

⁽²⁾ Sans toucher à la vis micrométrique.

est la 15^e seulement, n'est pas sensiblement plus colorée ⁽¹⁾. En continuant, c'est bien décidément la $(n - 1)^e$ frange qui est la moins colorée, mais on se rapproche de l'axe du quartz et pour cette raison probablement les franges deviennent moins bonnes, plus pâles et mal localisées au delà de la 25^e environ.

Revenant maintenant dans le sens positif et dépassant la frange centrale (Q_2 à zéro), celle-ci se colore en sens inverse ($R \mid V$), et c'est seulement vers la 16^e frange, que celle de gauche, la 15^e ($V \mid R$), devient aussi peu colorée (Q_2 à $+12^\circ$) et vers la 33^e frange (Q_2 à 27°) que l'achromatisme de la $(n - 1)^e$ frange est le meilleur. De ce côté, la netteté et la localisation restent assez bonnes.

Les résultats de l'observation sont, comme on voit, sensiblement plus favorables que ceux du calcul pour une source blanche, et tout à fait conformes à ce que le calcul faisait prévoir pour une source sensiblement rouge.

Conclusion. — Lorsqu'on pointe toujours la partie la plus sombre de la frange dans un intervalle d'une quinzaine de franges de part et d'autre de l'incidence normale (soit $\pm 12^\circ$ du quartz Q_2), c'est toujours sur la frange de différence de marche sensiblement nulle que l'on vise. Il en est de même au delà, dans toute l'étendue utilisable, tant qu'on pointe sur la frange $V \mid R$ pour les incidences négatives, sur la frange $R \mid V$ pour les incidences positives.

Avec une source sensiblement blanche, dans une étendue de 4 ou 5 franges, le pointé correspond toujours à la partie la moins colorée de la frange de retard nul pour une longueur d'onde moyenne 550μ . Lorsque la région achromatique s'éloigne de la frange sombre, celle-ci se colore beaucoup. Il est possible (surtout lorsque l'écart des traits qui encadrent la frange est un peu grand) que la manière de pointer que l'on adopte produise une variation progressive de pointé, équivalente à une variation progressive de

⁽¹⁾ En mettant les nicols parallèles, on a bien alors au milieu de l'intervalle une frange noire incolore.

la longueur d'onde moyenne de repère; toutefois, il me paraît impossible que dans mes expériences l'écart ait jamais atteint $\pm 20^{\mu}$, qui feraient virer au vert d'un côté, au jaune vif de l'autre, et il n'en résulterait encore qu'une incertitude de 0,002.

Ce n'est pas de là que proviennent encore les difficultés, mais de la position d'équilibre elle-même, et de la difficulté d'une protection thermique tout à fait satisfaisante.

Il m'a paru néanmoins utile de faire cette discussion détaillée; *la conclusion est nette : il vaudrait mieux compenser par un spath mince (0 millim. 5 d'épaisseur) taillé sous le même angle que les spaths épais. Le rapport des petites rotations serait rigoureusement indépendant de la longueur d'onde. La frange de retard zéro resterait rigoureusement noire, tant que l'influence chromatique du second terme ne se ferait pas sentir. Sous l'angle de $53^{\circ}, 5$ déjà reconnu comme le plus avantageux, ce terme n'existe pas; l'achromatisme parfait de la frange de retard nul se conserverait donc dans toute l'étendue angulaire utilisable.*

CHAPITRE VI.

DESCRIPTION DÉTAILLÉE DE LA PARTIE OPTIQUE.

(Pl. II et III.)

Comme je l'ai déjà fait remarquer, l'appareil optique se compose de deux parties distinctes : l'appareil biréfringent très délicat qui produit une différence de marche proportionnelle à la torsion du ruban; c'est la partie II de la description qui suit; l'appareil de mesure de cette différence de marche, dont la liaison avec le précédent n'exige aucune précision; c'est l'ensemble des parties I, III, IV de la description qui suit. Les parties I et III, l'une antérieure, l'autre postérieure à II, sont solidaires l'une de l'autre par l'intermédiaire de l'anneau métallique A, qui peut glisser et tourner à frottement doux sur le tube vertical extérieur de l'appareil: en service, il repose sur la base de ce tube, et son orientation est suffisamment définie par une encoche et une goupille.

Lunette de direction (pl. III). — Dans cette orientation, l'axe de tout l'appareil optique est perpendiculaire à l'axe du balancier, rigoureusement au zéro théorique, à quelques minutes près dans toutes les positions que le balancier peut prendre. On peut donc prendre appui sur l'appareil optique pour définir l'azimut de l'observation. C'est à cela que sert la lunette auxiliaire de Képler *LD*, montée à l'entrée du tube I; son axe, perpendiculaire à celui du tube par construction⁽¹⁾, est parallèle à la direction moyenne du balancier, et vise vers la droite de l'observateur. La distance à l'axe de rotation vertical de tout l'appareil entraîne une petite correction

⁽¹⁾ Dans le montage un peu sommaire, exécuté au Laboratoire, l'angle est un

peu différent d'un droit, la correction est facile à faire.

de parallaxe lorsque le repère est peu éloigné; il suffit d'ailleurs largement de définir l'azimut du balancier à $0^{\circ},1$ près.

L'appareil optique se compose des pièces suivantes énumérées dans l'ordre où elles sont traversées par la lumière :

I. Partie antérieure du tube optique.

1. Un nicol polariseur, NP, protégé par deux glaces planes non trempées, contenu dans une monture munie d'une goupille qui permet d'orienter la section principale horizontale, ou à 45 degrés de l'horizon, pour les réglages. La position normale est à 45 degrés de l'horizon.

2. Un compensateur Babinet à franges verticales B (pl. II, n° 1 et n° 3) maintenu par des cales minces de liège dans une ouverture carrée de 2 centimètres de côté percée dans une monture de laiton; devant le compensateur est une lame de verre G sur laquelle ont été tracés au diamant en regard de la frange centrale deux traits parallèles; comme il importe de rendre ces traits exactement parallèles aux franges, la plaque de verre est portée par un disque de laiton indépendant, qui peut tourner d'un petit angle dans une monture circulaire; pour cela il est muni d'une queue q maintenue entre deux vis v,v de la monture qui l'immobilisent quand la position convenable a été obtenue. Toute cette monture est mobile autour d'une charnière C parallèle à l'axe du tube, ce qui permet de sortir et de replacer le Babinet exactement pendant les réglages. La face antérieure est couverte d'un papier d'étain laissant libre une fente horizontale de 13 millimètres de long sur 1,5 de haut qui limite la meilleure partie du compensateur. Il est en effet très difficile d'obtenir des franges bien rectilignes sur une grande longueur, et la moindre courbure, la moindre brisure avec déplacement parallèle d'une partie à l'autre de la frange se traduit dans les mesures par des erreurs notables suivant que l'on porte son attention sur une partie ou une autre de la frange. L'écart entre les deux traits de repère doit être choisi d'après l'écart des franges

et l'intensité de la source lumineuse. Dans mon compensateur l'écart de deux franges est de 2 millim. 3; la source lumineuse est la petite flamme d'une lampe à essence minérale au foyer d'une lentille, ou la flamme d'une lampe à mèche plate alimentée par un mélange de pétrole et d'huile, ou encore une feuille de papier blanc renvoyant la lumière d'un ciel voilé; la partie sombre de la frange achromatique conserve à peu près la même largeur avec les diverses sources. Après divers essais, un écart de 0 millim. 4 entre les traits de repère, soit $\frac{1}{6}$ de l'écart des franges, a permis de pointer à coup sûr à moins du centième de frange; un écart un peu moindre, 0 millim. 35 environ, serait encore préférable avec des sources plus éclatantes.

3. Enfin une lame de quartz Q_1 , à faces parallèles traversées normalement par la lumière, est fixée dans une monture cylindrique, qu'on peut tourner d'un petit angle et immobiliser au moyen d'une vis lorsque la section principale du quartz a été rendue exactement horizontale. — Cette lame a une épaisseur de 7 millimètres; l'axe optique du quartz fait un angle de 45 degrés dans le sens direct avec la longueur du tube. — Cette lame est nécessaire pour l'achromatisme de la frange centrale.

II. *Tube lié à l'attache du fil de torsion.*

4. Une bonnette avec lame de verre isotrope pour obstruer le passage de l'air.

5. Le spath mobile Sp_1 , suspendu au fil de torsion. Ce spath est logé sans jeu dans une monture métallique où il est maintenu par quelques gouttes de cire. Sa section principale est horizontale quand le balancier est horizontal; l'axe du spath fait un angle de 45 degrés avec la longueur du tube. Epaisseur: 10 millim. 03.

6. Lame demi-onde $\frac{\lambda}{2}$ dans une bonnette à tête moletée, tournant à frottement dur dans son tube.

7. A l'autre extrémité du même tube, une seconde bonnette, de 1 centimètre de longueur, contient le second spath Sp_2 égal et parallèle au premier, elle peut être immobilisée par une vis de serrage. Tout le tube dans lequel tourne cette bonnette fait partie d'un bloc dont l'inclinaison peut être réglée dans le sens vertical et dans le sens horizontal au moyen de six vis de butée v , de manière à assurer le parallélisme avec le spath du balancier dans sa position moyenne (pl. II et pl. I, fig. 5).

III. *Partie postérieure du tube optique.*

8. Quartz servant à la mesure Q_2 . Ce second quartz égal au premier est fixé dans une monture mobile autour d'un axe vertical O (pl. III), qui sort à la partie supérieure du tube et porte un secteur Σ de 90° . Sur ce secteur, prend une pince de serrage P , maintenue entre la pointe d'une vis micrométrique à tête divisée VM et la tige d'une pompe à ressort antagoniste R .

9. Un objectif achromatique, convergent, de court foyer (pl. II).

10. Un petit nicol analyseur NA à faces normales à l'axe du tube.

11. Immédiatement derrière ce nicol, une lentille divergente achromatique, dans une bonnette à fente horizontale très étroite f (3 millimètres de long, 0 millim. 5 de haut). Ces trois pièces sont fixées dans un même tube, au milieu duquel un cercle divisé D permet de définir l'orientation du nicol.

Les deux lentilles constituent une sorte de microscope de Galilée; les foyers et les distances ont été choisis de manière que l'œil accommodé à l'infini voie nettement les franges du Babinet et les deux traits de repère, sans parallaxe appréciable, à travers les quartz et les spaths.

Ainsi constitué l'appareil optique est théoriquement complet; il a une longueur totale de 35 centimètres, dont 9 pour le nicol polariseur seraient encore susceptibles de réduction. Mais pour l'application à la balance de Cavendish transportable, il est trop court.

La tête de l'observateur, le bras et la main qui commandent la vis micrométrique approchent trop du balancier mobile, et troublent son équilibre par attraction newtonienne. J'ai donc été obligé d'allonger l'appareil optique au moyen d'un tube amovible.

IV. *Tube amovible formant lunette de Képler à oculaire positif et à grand tirage* (pl. II et III).

Ce tube est fendu, et un anneau de serrage le maintient solidement autour du tube qui porte le nicol NA, comme on le voit figuré en pointillé sur la figure.

Extérieurement, ce tube supporte deux larges lentilles simples, l'une convergente, l'autre divergente, formant lunette de Galilée, au moyen desquelles on lit facilement les nombres de tours et de centièmes de tour, sur l'échelle divisée fixe et le tambour divisé de la vis micrométrique.

Un bout de tube de caoutchouc (pl. III), monté sur un tube de laiton, entre deux têtes moletées, peut tourner sur une tige de laiton coudée, qu'un anneau de serrage permet de fixer où l'on veut le long du tube de la lunette. Cette sorte de treuil placé près de l'œil entraîne un fil dont l'une des extrémités est directement enroulée dans l'une des gorges profondes visibles à la tête de la vis micrométrique VM, et dont l'autre bout s'enroule dans l'autre gorge en sens contraire, après avoir passé sur une poulie de renvoi. Celle-ci est soutenue à l'extrémité d'un ressort à boudin qu'un anneau de serrage permet de déplacer le long du tube I.

Cette combinaison donne, en réglant convenablement la tension du fil, un entraînement extrêmement doux et très sûr, sans jeu, par fractions de division.

Les deux bouts du fil quittent leurs gorges respectives en sens opposé, et presque dans le prolongement l'un de l'autre; la résultante des tensions est nulle, ce qui est nécessaire pour éviter les déformations par flexion de la vis micrométrique.

Pour faciliter le remplacement du fil, la poulie de renvoi est montée sur un axe fixé d'un seul côté (et non dans une chape);

les joues des gorges sur la tête de la vis micrométrique VM sont fendues obliquement par un trait de scie étroit, dans lequel on fait facilement glisser le fil (au lieu de l'enfiler par un trou); un nœud au bout du fil suffit à l'arrêter.

La flexibilité du ressort à boudin en tous sens et la longueur du treuil de caoutchouc permettent au fil de suivre suffisamment la translation de la vis pour qu'il n'exerce jamais d'effort oblique notable sur la vis micrométrique.

Ce mode de transmission, adopté après divers essais, a toute la sûreté et toute la douceur de l'action directe des doigts, tant pour la sûreté et la délicatesse de la commande que pour la conservation de la vis.

Lorsqu'on enlève le bout du tube qui porte la lunette de Képler pour l'emballage, on écarte le fil du treuil de caoutchouc, on le replie sur les gorges de la vis et on le raccroche, sans tension, à la tige qui supporte le ressort à boudin.

RÉGLAGE OPTIQUE.

En opérant avec méthode, le réglage se fait sans difficulté.

On commence par examiner l'orientation des nicols, des quartz et du Babinet séparément en enlevant tout le tube qui les porte. Mettant la section principale du premier nicol horizontale, on enlève le Babinet, on oriente approximativement le quartz mobile Q_2 dans sa monture, et on met le nicol analyseur à l'extinction. On perfectionne l'orientation de Q_2 jusqu'à ce que l'extinction soit complète et se conserve quand on fait tourner Q_2 autour de son axe vertical.

On introduit alors le quartz Q_1 , et on règle son orientation par la même condition.

Passant maintenant aux spaths, on fait à l'œil un premier réglage grossier de parallélisme; pour cela, le balancier étant serré dans ses V, on tourne le spath S_2 dans sa bonnette jusqu'à ce que les faces verticales de droite et de gauche regardées directement pa-

raissent bien parallèles aux mêmes faces du spath S_1 ; les sections principales sont alors parallèles à 2 ou 3 degrés près. On serre alors le collier de manière à rendre difficile la rotation du spath S_2 dans sa bonnette.

Le parallélisme approché des faces traversées par la lumière, réglé d'abord à vue, est perfectionné en regardant l'image d'une flamme étroite réfléchie sur les quatre faces des spaths; il est avantageux de la polariser dans le plan horizontal pour isoler les rayons ordinaires. Pour ce réglage, on desserre un peu les deux vis v_3, v'_3 (pl. I) du bas de la plaque de laiton qui porte la bonnette, et on agit sur les quatre autres avec précaution; quand le réglage est obtenu par réflexion, ce qui avec une boucle de lampe à incandescence se fait très bien à une minute près, on bloque toutes les vis. Les deux spaths sont alors parallèles, mais ils peuvent être tous deux notablement inclinés sur le faisceau qui servira aux mesures; car la chape de S_1 , liée au balancier, peut ne pas lui être exactement perpendiculaire. Cela fait, on remet le tube qui porte les quartz et les nicols sur l'appareil, le plan de polarisation étant toujours horizontal. — L'extinction générale à travers les quartz et les spaths est assez bonne; on la perfectionne en agissant très doucement sur le spath S_2 dans sa bonnette; on l'immobilise alors.

Ici, il me manque en réalité un réglage, qui est supposé réalisé par construction, c'est un mouvement de rotation de tout le tube extérieur autour de son axe optique pour mettre les sections principales des quartz d'accord avec celles des spaths S_1 et S_2 .

On suppose que le balancier libéré se tiendra parallèle à sa position de serrage, ce qui est en effet réalisé à deux ou trois minutes près, par suite de la distance entre les V, de la longueur de la tige verticale du balancier, et de l'orientation de la pince de serrage du ruban de torsion, perpendiculaire au levier. On suppose, en outre, que dans cette position la chape métallique, dans laquelle est encastré le spath S_1 , a ses faces exactement horizontales et verticales et cela est peut-être moins sûr.

L'écart est certainement faible; il serait variable avec la manière

de niveler l'appareil; car l'orientation du spath S_1 par rapport à la verticale est indépendante de ce nivellement, tandis que l'inclinaison de tout le reste de l'appareil optique change quand on agit sur les vis calantes de l'appareil.

Les deux niveaux sensibles montés sur l'appareil permettent de rétablir toujours la même orientation relative avec précision.

Toutefois l'absence de ce réglage est une des causes qui limitent la précision des pointés au centième de frange à peu près, et rendent inutile et même désavantageux l'emploi d'une source de lumière un peu intense. Pour avoir le millième de frange, certainement possible avec des spaths taillés à $53^\circ 5'$, ce réglage serait nécessaire.

Quoi qu'il en soit, le réglage étant ainsi achevé entre nicols horizontaux, on introduit la lame demi-onde, carrée, dont la section principale est suivant une diagonale. La mise en place de cette lame ne peut se faire qu'en enlevant le tube métallique vertical extérieur pour pouvoir ouvrir les portes du tube intérieur. L'orientation approximative, d'après les côtés du carré, à l'œil, est facile.

On met maintenant les nicols polariseur et analyseur à 45° de l'horizon, et toujours à l'extinction.

Mais maintenant l'extinction n'est plus ni incolore, ni uniforme. La coloration est celle de la teinte sensible; elle dépend de l'épaisseur de la lame demi-onde; on la rend aussi sombre que possible en tournant doucement la lame dans sa bonnette. La distribution de la couleur dépend surtout de l'inclinaison relative des sections principales des spaths par rapport à l'horizontale. Il faut alors agir sur les six vis v_1, v_2, \dots, v_3 de la plaque qui porte le spath S_2 , sans les desserrer, mais en profitant de l'élasticité de cette plaque pour rendre la distribution des teintes bien uniforme.

Lorsqu'il en est ainsi, on peut rendre la liberté au balancier, et mettre en place le Babinet.

On éclaire avec une source monochromatique, et l'on voit les

franges défilent dans le champ. Ces franges doivent rester bien verticales, sans s'incliner dans un sens ou dans l'autre (l'appareil étant bien nivelé) dans toute l'étendue du mouvement du balancier; sinon il faut retoucher un peu le spath S_2 .

Lorsque ce résultat est obtenu, on peut observer en lumière blanche; on a d'ordinaire la frange centrale avec le balancier serré, pour une position moyenne du quartz Q_2 . Si on ne l'a pas, il faut retoucher le parallélisme des faces d'entrée de la lumière, en s'aidant de la réflexion, comme il a été dit, mais en se méfiant des deux images réfléchies sur la lame demi-onde intermédiaire.

Enfin on règle le parallélisme des traits de repère et de la frange, de manière à ne laisser aucune incertitude de pointé.

Une partie de ce réglage est un peu longue par la nécessité d'enlever et de remettre le tube extérieur pour atteindre la lame demi-onde, et par l'absence d'organes permanents pour les mouvements lents. Mais cet inconvénient est minime; car le réglage une fois fait, on n'a jamais à y retoucher. On peut démonter tout l'appareil, dévisser toutes les pièces du balancier; en les remontant tout le réglage a conservé sa perfection. On peut mettre l'appareil emballé aux bagages, rien n'est dérégulé, et c'est en vue de cette parfaite stabilité de réglage que la construction a été prévue.

Un seul changement se produit spontanément mais très lentement avec le temps, plus vite et plus irrégulièrement par les transports en chemin de fer. C'est le déplacement du zéro de torsion du ruban. Pour celui-là un organe de réglage d'un emploi facile est nécessaire.

Dans la description du réglage, j'ai signalé au passage un certain nombre de défauts secondaires de l'appareil. Lorsqu'on se contente d'une précision relative du centième, ces défauts sont sans importance; mais lorsqu'on veut atteindre le millième, il devient nécessaire de faire une quantité de mesures accessoires, dont aucune à la vérité n'est difficile, mais qui donnent à l'étalonnage une apparence de complication qu'une construction nouvelle me permettrait d'éviter.

De tous ces défauts, le plus grave est d'avoir pris les spaths à 45 degrés, au lieu de $53^{\circ} 5$.

Dans mon appareil les axes des spaths sont à 45 degrés à droite, et ceux des quartz à 45 degrés à gauche; de la sorte le balancier et le quartz compensateur tournent dans le même sens lorsque la frange centrale reste entre ses repères.

Réglage de l'orientation d'équilibre du balancier. — D'après la nature même de l'appareil de mesure optique, l'orientation du balancier doit être réglée à quelques minutes près pour utiliser la région du quartz qui donne la frange la plus noire, et réduire au minimum l'influence des corrections d'étalonnage du quartz dans les mesures de comparaison. Il faut donc avoir un moyen très délicat d'action sur le fil de torsion. Il n'est pas impossible d'y arriver en agissant directement à la main sur la tête moletée (pl. I, n° 1), qui a 38 millimètres de diamètre; c'est ce que j'ai fait jusqu'en 1903; mais il est trop difficile d'opérer méthodiquement. J'ai arrangé un organe de réglage très simple et sûr, composé de deux pièces amovibles (fig. 10). L'une C_1 est un demi-collier à vis de serrage, que l'on fixe, avec interposition de cales de drap, sur la tête moletée de l'attache du fil de torsion; au collier est soudé un bras de laiton, OA, recourbé en pointe vers le bas, de 10 centimètres de longueur. L'autre pièce est également un demi-collier, plus large, C_2 , qui se fixe sur le tube intérieur T (pl. I), après qu'on a enlevé la calotte protectrice du tube extérieur. Ce collier porte un bras et un arc de cercle en laiton BB' devant lequel la pointe A peut se déplacer. Dans les mesures d'étalonnage absolu en angle, un palmer avait été attaché à l'arc de cercle; la pointe du bras était maintenue appuyée, par un ressort de caoutchouc, contre la pointe de la vis du palmer, qu'on faisait avancer par dixièmes de millimètre.

Lorsque le zéro a été considérablement déplacé, par les trépidations d'un voyage, ou lorsqu'on est obligé de remplacer le fil, il est utile de passer facilement et sans secousse du mouvement rapide au mouvement lent pour une position quelconque du bras

OA. Pour cela on a soudé à une extrémité B' de l'arc BB' un crochet; auquel est attaché un ressort d'acier en hélice. A l'autre extrémité B est un petit treuil vertical de 4 millimètres de diamètre, à tête moletée de 2 centimètres de diamètre; ce treuil est percé d'un trou radial, qui se rencontre avec un trou axial dirigé vers le bas; un bout de fil à coudre attaché au ressort à boudin passe par le trou radial, ressort dans l'axe et pend librement.

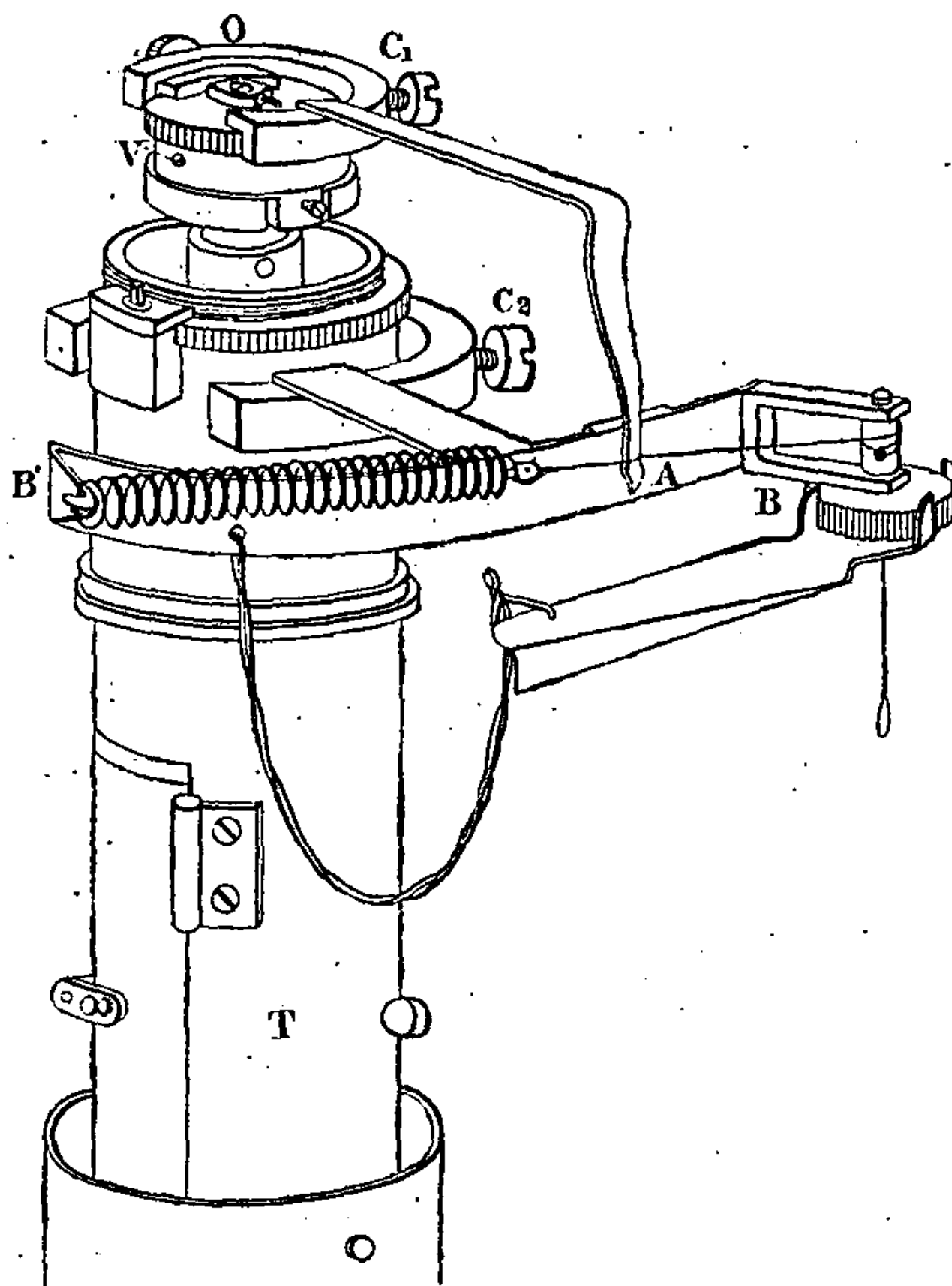


Fig. 10.

Ce fil fait un tour dans une rainure à l'extrémité de l'aiguille OA.

Tant que le fil est peu tendu, on peut mouvoir directement à la main l'aiguille OA, pour les premiers réglages, que l'on fait après avoir ôté la boîte de bois et dévissé les deux couvercles des tubes horizontaux, en regardant directement l'extrémité du balancier à travers les petites fenêtres (fig. 5) de l'amortisseur.

Quand le balancier cesse d'appuyer toujours du même côté, et

commence à se libérer pour un très petit choc, on met le fil en usage. Pour cela, on tend peu à peu le ressort à la main, tout en tournant le bouton du treuil, de manière à faire glisser le fil autour du bras OA sans l'entraîner; quand le fil a fait 3 ou 4 tours sur le treuil, le ressort est tendu de 4 ou 5 centimètres, on laisse le fil se tendre doucement. Le bras OA est devenu solidaire du fil, sans avoir été sensiblement déplacé. La manœuvre est facile, puisque le balancier bute encore, car il faut au moins 1 millimètre de déplacement de OA pour amener le balancier au milieu; quand il s'agit seulement d'améliorer un zéro déréglé, on fait toute cette manœuvre avant de desserrer la vis v (pl. I) qui libère les rotations de l'attache supérieure du fil de torsion.

Un douzième de tour du bouton moleté (30 degrés) ne correspond qu'à 1 millimètre du bras OA ou 35 minutes environ; il est donc facile de tourner à la main le bouton moleté de manière à rendre le balancier libre et à l'amener sensiblement au milieu de ses repères (fig. 5). Quand on y est arrivé, on revise les deux couvercles; on remet la boîte protectrice en bois et on cherche les franges, en donnant à la main un déplacement angulaire au quartz Q_2 ; quand on les a trouvées⁽¹⁾, il reste à les amener dans la région la plus favorable aux bonnes mesures. Pour cela le réglage du treuil à la main manquerait de délicatesse; on lui adapte alors la longue clef en zinc de 14 centimètres environ, BD, qui entre, en forçant un peu, sur le bouton moleté, dans une direction quelconque. Un déplacement de 1 millimètre de l'extrémité de cette clef enroule ou déroule $1/70$ de millimètre de fil, et tourne

⁽¹⁾ On peut faire tout le réglage au moyen des franges, car les 90 franges environ que la course du quartz permet de voir correspondent à 3 degrés d'angle du balancier environ, et comprennent toute la course libre du balancier; on voit donc les franges soit qu'il appuie d'un côté, soit qu'il appuie de l'autre. Mais la recherche est alors très

pénible, parce qu'on ne peut toucher ni au treuil ni au quartz sans que le balancier reçoive une impulsion de ses butoirs (qui, eux, ne sont pas isolés par de la ouate); les franges sortent alors du champ, et il faut une attention soutenue pour se rappeler de quel côté se fait la butée, et ne pas faire de fausse manœuvre.

l'attache du ruban de torsion 30 secondes environ, soit $1/4$ de frange.

Ce système, à sensibilité échelonnée, très simple et très rustique, obéit très bien, et permet le réglage méthodique dans la région que l'on veut.

Lorsque le réglage est achevé, on bloque la vis *v* (fig. 10 et pl. I, n° 1) qui immobilise l'attache du fil de torsion; on desserre les deux demi-colliers, et enfin on détend le fil de réglage en détordant le treuil; c'est la dernière opération à faire, sous peine de détruire tout le réglage. On remet enfin le couvercle protecteur, et l'appareil est prêt à fonctionner.

Ce réglage ne présente aucune difficulté pourvu que l'on opère avec méthode et sans aucune nervosité. Il est en effet très long, par la nature des choses; car, le balancier ayant une période d'oscillation de 10 minutes, il faut suivre la frange pendant 3 ou 4 minutes au moins pour être assuré que l'on observe bien une position d'équilibre et non une élongation extrême. Après chaque retouche les mouvements s'amortissent vite dès que le balancier ne bute plus, il faut néanmoins attendre une dizaine de minutes au moins pour juger de la position d'équilibre qu'on vient d'atteindre. En fait il faut compter une bonne demi-journée, pour régler le zéro quand le balancier bute d'un côté, en supposant que le ruban de torsion ait un zéro fixe. Naturellement si les trépidations ont fait reparaitre de la réactivité élastique, il faut attendre qu'elle ait disparu; c'est ce qui arrive pendant quelques jours pour un fil nouveau, ou pour un fil rattaché après rupture.

CHAPITRE VII.

ÉTALONNAGE THÉORIQUE.

A. SOURCE MONOCHROMATIQUE.

Retard produit par la rotation du balancier. — Lorsque j'ai fait tailler les spaths de mon appareil, je n'avais pas encore reconnu tous les avantages de la taille sous l'angle de $53^{\circ}5$; ils ont donc été taillés sous l'angle de 45 degrés. Pour une épaisseur de 1 centimètre, la rotation en radians est liée au retard en $\mu\mu$ par la formule (raie E, $\lambda = 527$)

$$\delta i = -\frac{10^{-7}}{0,1105} \delta(O - E) = -9,050 \cdot 10^{-7} \delta(O - E).$$

Pour une frange de longueur d'onde 527 (raie E) :

$$\delta i = 4,769 \cdot 10^{-4}, \quad \text{soit} \quad 98'' 37.$$

Pour une frange de la raie verte du mercure (arc dans le vide) 546,07 :

$$\delta i = 4,943 \cdot 10^{-4}, \quad \text{soit} \quad 101'', 57,$$

en tenant compte de la dispersion du spath.

Pour une frange due à la partie la plus brillante du spectre 550 :

$$\delta i = 4,9754 \cdot 10^{-4}, \quad \text{soit} \quad 102'' 17.$$

Pour la raie D :

$$\delta i = 5,262 \cdot 10^{-4}, \quad \text{soit} \quad 108'' 8.$$

Mais il se trouve que l'incidence moyenne utilisée n'est pas tout à fait l'incidence normale. Le nicol polariseur de mon appareil n'est malheureusement pas à faces normales au faisceau lumineux, de sorte qu'il décentre le faisceau; pour conserver les deux traits de repère du Babinet au milieu du champ, j'ai été conduit à les placer un peu en dehors de l'axe géométrique de l'appareil optique, de sorte que la ligne qui va du milieu des traits de repère au centre optique de l'objectif fait un angle de $1^{\circ},2$ avec l'axe géométrique.

Il faut tourner de 37 franges environ pour 1 degré, et alors le balancier bute. L'étendue mesurable par la vis de mon compensateur est de 19 à 20 franges; dans cet intervalle, la sensibilité ne varie que de $\frac{1}{400}$; en adoptant la sensibilité relative au milieu de la course de la vis, on ne se trompe donc pas dans son étendue entière de plus de $\frac{1}{800}$.

Mais, lorsque par suite de déplacements du zéro on se trouve conduit à employer le compensateur serré sous un autre angle moyen, la sensibilité moyenne a changé en même temps par suite du changement d'incidence correspondant sur le spath 1. Le quartz tournant dans le même sens que le spath, mais 29 fois plus vite dans les limites de mon appareil, la sensibilité croît de 0,001 pour 5 degrés du quartz.

Quartz. — Ce retard est mesuré au moyen de la lame de quartz; la position de celle-ci est définie par l'angle sous lequel le secteur divisé est serré dans la pince et par le nombre de tours de la vis micrométrique qui pousse cette pince; d'où la nécessité d'une double correction.

La vis micrométrique entraîne le quartz par l'intermédiaire d'une pince de serrage dont la demi-largeur est de 7,0 millimètres; c'est sur une mouche d'acier qu'appuie la pointe de la vis. Le quartz est normal à l'axe géométrique lorsque le zéro du secteur, divisé en degrés, est en face du trait de la pince de serrage et lorsque la vis micrométrique est à la division 990.

La distance de l'axe de rotation du quartz à l'axe de la vis micrométrique est de 45 millim. 5. Ce rayon a été mesuré de plusieurs manières concordantes : par des mesures géométriques directes sur le secteur, au pied à coulisse; par le côté de l'angle de 60 degrés sur le secteur, augmenté de la distance du bord du secteur à l'axe de la vis; par comparaison avec la vis micrométrique (0^{mm},5 de pas) en immobilisant le secteur et faisant avancer de degré en degré la pince un peu desserrée.

Ce dernier procédé donne directement le nombre de divisions de la vis qui correspond à 1 degré dans la portion de la course de la vis (entre 1200 et 2400) où le rayon qui aboutit à la pointe de la vis est sensiblement perpendiculaire à l'axe de la vis.

158,8 divisions valent.....	1° du secteur
100,0 divisions valent.....	0° 630

Correction de tangence. — La course de la vis micrométrique correspond à un intervalle de 15 degrés; sa valeur en angle n'est donc pas constante sur toute sa course, d'autant plus que le plan de la mouche sur laquelle appuie la vis passe à 7 millimètres du centre du secteur⁽¹⁾. Le rayon qui passe par le trait de la pince est normal à la vis lorsque celle-ci est à la division 1150. Des mesures géométriques citées plus haut il résulte que l'angle de rotation χ du quartz, croissant avec le nombre de divisions n , est lié à celui-ci par l'équation

$$\frac{n - 1150}{200} = 7 + \left(45,5 - \frac{7}{\sin \chi}\right) \operatorname{tg} \chi.$$

⁽¹⁾ Cette inadvertance de construction a une autre conséquence, c'est que la pointe de la vis chemine de près de 2 millimètres à la surface de la mouche. Une autre inadvertance, c'est que la pince ne fait pas partie d'une alidade; la manière dont elle s'appuie sur le secteur laisse un peu d'indétermination

dans la position qu'elle prend une fois serrée. La correction, calculée en supposant que le plan de la mouche passe à 7 millimètres de l'axe du secteur, peut varier, suivant le serrage, de 2 ou 3 divisions vers le zéro là où la correction est la plus grande. Ces défauts sont faciles à corriger.

Développons en χ :

$$\frac{n-1150}{200} = 45,5\chi \left[1 - \frac{7}{91}\chi + \frac{\chi^2}{3} \right];$$

Réolvons, par rapport à χ ,

$$\chi = \frac{n-1150}{9100} \left[1 + \frac{7}{91} \left(\frac{n-1150}{9100} \right) - \left[\frac{1}{3} - 2 \left(\frac{7}{91} \right)^2 \right] \left(\frac{n-1150}{9100} \right)^2 \right].$$

Soit n' le nombre de divisions qu'on lirait s'il y avait proportionnalité aux angles, l'équation précédente donne :

$$n' - n = (n - 1150) \left[8,453 \cdot 10^{-4} \frac{n-1150}{100} - 0,442 \cdot 10^{-4} \left(\frac{n-1150}{100} \right)^2 \right].$$

Cette correction, partout additive, est donnée dans le tableau suivant de 100 en 100 divisions, c'est-à-dire pour chaque tour de vis.

TABLEAU II. — CORRECTION DE TANGENCE.

$\frac{n}{100}$	— 2,5	— 2	— 1	0	1	2	3
$n' - n$	28,7	26,3	21,8	17,9	14,5	11,4	8,8
$\frac{n}{100}$	4	5	6	7	8	9	10
$n' - n$	6,7	4,8	3,3	2,1	1,2	0,6	0,2
$\frac{n}{100}$	11	12	13	14	15	16	17
$n' - n$	0	0	0,2	0,5	0,8	1,3	1,8
$\frac{n}{100}$	18	19	20	21	22	23	24
$n' - n$	2,3	2,9	3,4	3,8	4,1	4,4	4,5

Incidence sur le quartz. — Après cette correction, les différences de lecture sont proportionnelles à la variation d'incidence sur le

quartz, à raison de $0^{\circ}630$ par 100 divisions. Mais, en raison des grandes variations d'incidence utilisées sur le quartz suivant la région de la vis et la position de la pince sur le secteur, une même variation d'incidence ne correspond pas partout à un même retard, et par conséquent à une même rotation du spath et du balancier. Pour savoir la valeur de 100 divisions en retard optique, il faut déterminer l'angle d'incidence sur le quartz. Si la construction était tout à fait symétrique, l'incidence serait normale lorsque le zéro du secteur est en regard du trait de la pince, la vis étant à la division 1150.

L'axe du quartz est à 45 degrés à gauche du zéro; je le note -45 degrés et, sur le secteur, je compte les angles négatifs à gauche, positifs à droite. De cette façon l'incidence serait, en degrés :

$$I = I_0 + \frac{n' - 1150}{100} \cdot 0,63 = I_0 - 7^{\circ},25 + \frac{n'}{100} 0,63.$$

En fait le faisceau de lumière qui sert aux mesures va des traits de repère du compensateur Babinet au centre optique du premier objectif. Le déplacement latéral du faisceau éclairant par le premier nicol, dont les faces ne sont pas normales à l'axe, a conduit à placer les traits de repère un peu en dehors de l'axe géométrique pour les avoir au milieu du champ. Des mesures faciles à faire sur l'appareil montrent que le faisceau lumineux fait un angle de $1^{\circ}2$ sensiblement avec l'axe géométrique, et qu'il est normal au quartz Q_2 serré à $0^{\circ},0$ pour la division 1180; la formule pour l'incidence devient :

$$I = I_0 - 7^{\circ},4 + \frac{n'}{100} 0,63.$$

L'angle du rayon incident avec l'axe du quartz est : $45^{\circ} + I$.

Dans chaque série on note l'angle I_0 au dixième de degré.

Une table, qu'il est inutile de reproduire, facilite le passage de n' et I_0 à I .

Retard produit par le quartz. — La formule générale rappelée au chapitre précédent :

$$O - E = \varepsilon \left[\sqrt{\frac{1}{b^2} - \sin^2 i} - A \sin i - \sqrt{C} \sqrt{1 + \frac{A^2 - B}{C} \sin^2 i} \right]$$

pour le retard produit par une lame oblique se simplifie quand la biréfringence est faible. En particulier, lorsque l'axe est à 45° de la normale à la lame, on a :

$$O - E = \varepsilon \frac{a-b}{2ba} \left[2b \sin i + \frac{1}{\sqrt{1 - b^2 \sin^2 i}} \right].$$

L'excès du retard en transmission oblique sur le retard en transmission normale, développé en série, est :

$$(O - E)_i - (O - E)_0 = \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{a-b}{ab} \left[2b \sin i + \frac{b^2 \sin^2 i}{2} + \frac{3}{2} \frac{b^4 \sin^4 i}{4} + \frac{5}{2} \frac{b^6 \sin^6 i}{8} + \dots \right].$$

Pour le quartz, on a (raie E) :

$$\frac{a-b}{ab} = 0,00918, \quad \frac{1}{a} = 1,54718, \quad \frac{1}{b} = 1,55636,$$

$$a = 0,6463, \quad b = 0,6424.$$

Développée suivant les puissances de i , cette formule donne :

$$(O - E)_i - (O - E)_0 = \varepsilon 0,005897 \left[i + 0,1607 i^2 - \frac{1}{6} i^3 - 0,0038 i^4 \dots \right]$$

ou, en nombre de franges, de longueur d'onde $\lambda = 527$ pour le

quartz de 7 millimètres d'épaisseur :

$$f = 78,33 \left[i + 0,1607 i^2 - \frac{1}{6} i^3 - 0,0038 i^4 \right],$$

l'angle i étant compté en radians; la lecture directe et la formule complémentaire du numéro précédent donnent cet angle I en degrés; l'équation ci-dessus devient :

$$f = 1,3664 I \left[1 + 0,002814 I - 51 \cdot 10^{-6} I^2 - 2,04 \cdot 10^{-8} I^3 \right].$$

On voit que le quartz donne à peu près 4 franges par 3 degrés et que la variation avec l'incidence est lente. Le tableau III contient, dans une première colonne les incidences, puis les valeurs de la parenthèse, c'est-à-dire le rapport de la différence de marche réelle due au quartz sous l'incidence indiquée (positive $\frac{f}{f_0}$ ou négative $\frac{f}{f_0}$) à la différence de marche que l'on mesurerait au voisinage de l'incidence normale. Sous cette forme, le tableau convient pour toute épaisseur de quartz et toute longueur d'onde.

Il faut diviser la lecture *totale* corrigée,

$$n' + 159 I_0 - 1180,$$

comptée depuis l'incidence normale, par ce nombre $\frac{f}{f_0}$ pour avoir une lecture totale proportionnelle à la différence de marche et, par conséquent, à la rotation du balancier.

Pour la commodité des calculs sous un serrage déterminé, deux autres colonnes contiennent les variations du facteur $\frac{f}{f_0}$ par tour (corrigé) de la vis micrométrique.

TABLEAU III. — INFLUENCE DE L'INCIDENCE
SUR LE RETARD (QUARTZ).

$\pm I.$	$\frac{f+}{f_0}$	$0,63 \delta \left(\frac{f}{f_0} \right)$	$\frac{f-}{f_0}$	$0,63 \delta \left(\frac{f}{f_0} \right)$
0.....	1,0000	$+ 17 \cdot 10^{-4}$	1,0000	$+ 17 \cdot 10^{-4}$
1.....	1,0028	17	0,9971	18
2.....	1,0054	17	0,9942	19
3.....	1,0080	16	0,9911	20
4.....	1,0104	15	0,9879	20
5.....	1,0128	14,5	0,9847	21
6.....	1,0150	14	0,9813	22
7.....	1,0172	13,5	0,9778	22
8.....	1,0192	13	0,9742	23
9.....	1,0212	12	0,9705	23
10.....	1,0230	11,5	0,9668	24
11.....	1,0248	$+ 11 \cdot 10^{-4}$	0,9629	$+ 25 \cdot 10^{-4}$
12.....	1,0264	10	0,9589	25
13.....	1,0280	9,5	0,9548	26
14.....	1,0294	9	0,9506	27
15.....	1,0308	8	0,9463	27
16.....	1,0320	7	0,9420	28
17.....	1,0331	6,5	0,9375	29
18.....	1,0341	6	0,9328	29
19.....	1,0352	5,5	0,9283	30
20.....	1,0359	5	0,9233	31
21.....	1,0367	$+ 4,5 \cdot 10^{-4}$	0,9185	$+ 31 \cdot 10^{-4}$
22.....	1,0373	4	0,9135	31
23.....	1,0378	3	0,9084	32
24.....	1,0382	2,5	0,9032	33
25.....	1,0385	2	0,8979	34
26.....	1,0388	2	0,8924	35
27.....	1,0389	0	0,8869	35
28.....	1,0389	0	0,8813	36
29.....	1,0388	0	0,8756	36
30.....	1,0386	- 1	0,8698	37

$$f = f_0 (1 + 0,002814 I - 0,000051 I^2).$$

Dans la formule qui précède, la variation en fonction de l'incidence est lente; on peut donc obtenir le changement d'écart des franges en fonction de l'incidence en différenciant :

$$\delta f = 1,3664 \delta I [1 + 0,005628 I - 153 \cdot 10^{-6} I^2 - 8,16 \cdot 10^{-8} I^3].$$

On calculera au moyen de cette formule la valeur de $\frac{\delta f}{\delta I}$ de degré en degré; puis on formera l'inverse $\frac{\delta I}{\delta f}$; c'est, en degrés du quartz, l'intervalle de deux franges au voisinage de l'incidence I ; enfin on convertira cet intervalle en nombre de divisions de la vis micrométrique n' .

TABLEAU IV. — INFLUENCE DE L'INCIDENCE SUR LA DISTANCE DES FRANGES (QUARTZ).

$\pm I^\circ$.	$\frac{\delta f_+}{\delta f_0}$.	$\frac{\delta f_-}{\delta f_0}$.
0.	1,000	
2.	1,011	0,989
4.	1,020	0,976
6.	1,029	0,961
8.	1,035	0,945
10.	1,041	0,929
12.	1,046	0,910
14.	1,049	0,891
16.	1,051	0,871
18.	1,052	0,850
20.	1,051	0,827
22.	1,049	0,803
24.	1,046	0,778
26.	1,041	0,751
28.	1,036	0,724
30.	1,029	0,695
32.	1,021	0,666
34.	1,011	0,635
36.	1,001	0,603
38.	0,989	0,569
40.	0,975	0,535

Dans le tableau IV, la première colonne donne l'incidence I positive ou négative en degrés.

La seconde donne le rapport du retard sous une incidence positive δf_+ au retard sous l'incidence normale pour une même variation d'incidence.

La troisième colonne donne les mêmes quantités pour les incidences négatives. C'est la parenthèse $[1 + \dots]$ de l'expression ci-dessus. Le retard maximum correspond à l'incidence $+18$ degrés.

Ces deux colonnes peuvent servir pour toute épaisseur de quartz et pour toute longueur d'onde, car l'indice du quartz n'influe que sur l'écart par rapport à l'unité, et de D à E l'indice n'augmente que de $\frac{1}{500}$, et autant de E à F.

Quant au retard en *longueurs d'onde* il varie davantage, en raison de la variation de la longueur d'onde, comme dans tous les phénomènes d'interférences. Le coefficient 1,3664 se rapporte aux quartz de 7 millimètres, et à la raie E. Il faut le multiplier par un facteur que donne la table suivante pour les principales raies du spectre, en tenant compte de la dispersion du quartz.

C.	D.	BLANC.	E.	F.	G.
656 $\mu\mu$	589	<u>550</u>	527	486	431
0,797	0,895	<u>0,961</u>	1,000	1,100	1,250

On doit donc prendre 1,3131 pour le blanc qui sert aux mesures; pour la raie D 1,2236, et 1,3224 pour la raie verte du mercure ($\lambda=546$) qui toutes deux ont servi à étalonner l'appareil par expérience.

Ces coefficients supposent l'angle du quartz mesuré en degrés; il faut les multiplier par 158,8 si la mesure d'angle est faite en divisions corrigées, n' , de la vis micrométrique.

Une frange de la raie verte du mercure correspond donc à $\frac{1^\circ}{1,3224}$ ou 0,756 au voisinage de l'incidence normale, soit en divisions du micromètre 120 div. 1.

En lumière jaune, et en lumière blanche, les valeurs théoriques sont 129 divisions et 120 div. 9.

Contrôle expérimental. — L'étalonnage des divisions du quartz mobile Q_2 en longueurs d'onde a été fait à diverses reprises. Je citerai seulement la dernière (mai 1906). Le balancier étant immobilisé, tout l'appareil a été éclairé au moyen de la raie verte de l'arc au mercure ($\lambda = 546$). Le secteur divisé étant serré à une incidence déterminée, on l'entraîne par la vis micrométrique, et on lit, aller et retour, la position de toutes les franges (une vingtaine) que le déplacement de cette vis permet de pointer, en répétant chaque mesure quatre ou cinq fois. Cela fait, la vis micrométrique restant en place, on desserre le secteur, et on le déplace exactement de 10 franges, on lit l'incidence sur le secteur, on serre, et on recommence les mesures avec la vis micrométrique. On avance ainsi de 10 franges exactement à chaque série. L'étendue utilisable, par un choix convenable de l'incidence sur le quartz, ne dépasse pas 80 franges.

Les nombres de divisions corrigés n' sont proportionnels aux rotations du quartz; la différence des lectures corrigées, pour deux franges consécutives est ramenée à ce qu'elle serait au voisinage de l'incidence normale en multipliant par $\frac{\delta f}{\delta f_0}$.

Le tableau ci-contre contient :

- 1° L'angle de serrage du secteur I_0 .
- 2° L'incidence moyenne I d'un groupe de franges (généralement 5, quelquefois 4 aux extrémités de la vis).
- 3° La différence des lectures corrigées $\delta n'$, rapportée à une frange.
- 4° Le produit de cette différence par le facteur $\frac{\delta f}{\delta f_0}$ calculé au tableau IV.

La moyenne générale est 119,37 dont les moyennes particulières à chaque groupe s'écartent peu. Les écarts sont à la limite de précision des lectures. L'écart avec la valeur théorique 120,1 paraît dépasser un peu cette limite, mais bien peu.

COMPARAISON AVEC L'EXPÉRIENCE.

I_0	I.	$\frac{\delta n'}{\delta f}$	$\frac{\delta n'}{\delta n_0}$	
28°8.....	34,5	119,0	119,8	119,50
	31,1	115,4	118,2	
	27,5	115,4	119,6	
	23,8	115,2	120,5	
21°2.....	26,7	116,0	120,4	120,20
	23,4	114,4	119,7	
	19,8	114,6	120,4	
	16,2	114,4	120,3	
14°.....	19,5	113,2	119,0	119,35
	16,2	113,4	119,2	
	12,7	114,4	119,8	
	9,1	114,8	119,4	
6°5.....	12,2	114,0	119,2	119,20
	9,0	114,4	118,9	
	5,3	116,4	119,4	
	1,6	118,0	119,3	
— 0°9.....	4,9	115,6	118,5	119,0
	1,6	117,8	119,2	
	— 2,1	120,4	119,3	
	— 6,0	123,6	119,1	
— 8°0.....	— 2,3	119,8	118,5	119,0
	— 5,7	123,0	118,8	
	— 9,6	127,4	119,1	
	— 13,3	132,6	119,6	
— 15°9.....	— 9,4	127,6	119,5	119,30
	— 13,1	131,8	119,1	
	— 17,4	139,2	119,6	
	— 21,4	146,2	119,2	

GRADUATION DIRECTE. — La manière la plus simple de faire la double correction de tangence et d'incidence est de faire la graduation en lumière monochromatique sous le serrage même du quartz Q_2 qui a été employé dans les mesures géodésiques. On a ainsi un tableau des divisions observées de frange en frange;

adoptant pour valeur unité l'écart de deux franges consécutives arbitrairement choisies, on inscrit alors en regard de chaque frange le nombre de divisions qu'on aurait dû lire sur une graduation uniforme; on en fait les différences qui sont les corrections à apporter à la lecture en regard. Voici à titre d'exemple le tableau ainsi dressé pour le serrage de $+ 11^\circ$, qui a servi à presque toutes les observations du Simplon.

Sous les angles de serrage $6^\circ 8$, et surtout 0 degré, les corrections sont beaucoup plus fortes en adoptant la même unité 115 divisions par frange verte de mercure, conformément d'ailleurs à la théorie.

TABLEAU V. — CORRECTION DE FRANGE EN FRANGE ($I_0 = + 11^\circ$).

RANG DE LA FRANGE.	LECTURE BRUTE.	LECTURE CORRIGÉE.	CORRECTION.
—	—	—	—
	n	n''	
0.	— 14	+ 015	+ 29
	+ 107	130	+ 23
	228	245	+ 17
	348	360	+ 12
	467	475	+ 8
5.	585	590	+ 5
	703	705	+ 2
	819	820	+ 1
	935	935	0
	1050	1050	0
10.	1165	1165	0
	1279	1280	+ 1
	1392	1395	+ 3
	1505	1510	+ 5
	1618	1625	+ 7
15.	1731	1740	+ 9
	1844	1855	+ 11
	1957	1970	+ 13
	2071	2085	+ 14
	2185	2200	+ 15
	2299	2315	+ 16

Après cette correction une frange verte équivaut uniformément à 115 divisions; par conséquent 1 division ainsi corrigée équivaut à une rotation de $\frac{101''45}{115}$ ou 0"882 pour le spath sous l'incidence normale.

Valeur angulaire d'une division de la vis micrométrique. — Nous avons calculé au début de ce chapitre le nombre de secondes d'arc qui correspond à une frange pour la rotation du spath. Nous avons calculé ensuite, et contrôlé par l'observation, le nombre de divisions (corrigé) qui correspond à une frange pour le quartz, sous l'incidence normale. La comparaison de ces nombres donne la valeur angulaire d'une division (corrigée) de la vis micrométrique sous l'incidence normale à la fois pour le spath et pour le quartz.

	SPATH.	QUARTZ.	1 DIVISION.
	—	—	—
Raie E	98"37	116 ^{div} 3	0"8459
Raie verte de mercure . . .	101 57	120 1	0 8454
Blanc (550)	102 17	120 9	0 8450
Raie D	108 8	129 0	0 8434

Le 4^e chiffre est douteux.

On ne se trompe certainement pas d'un millième en adoptant 0"845, pour l'incidence normale sur le spath.

Sous l'incidence de + 18 degrés, du maximum d'uniformité pour le quartz taillé à 45 degrés de l'axe (tableau IV de δf) ce nombre doit être multiplié par 1,052 et devient 0"899.

Il faut *augmenter* cet angle de $\frac{1}{200}$ de sa valeur quand l'incidence sur le spath *augmente* de 1 degré.

Tous ces résultats se rapportent à une source monochromatique, même ceux relatifs à la longueur d'onde 550 attribuée au blanc, car ils sont calculés pour la condition que le retard dû au quartz Q_2 compense exactement le retard dû au spath Sp_1 .

SOURCE BLANCHE.

Or M. Cornu a remarqué, il y a une vingtaine d'années, qu'une source à spectre étendu, approximativement blanche, n'équivaut pas à une source monochromatique ayant même longueur d'onde moyenne. Avec la source blanche, l'œil n'a aucun moyen de reconnaître la frange de retard exactement nul, mais seulement la frange achromatique. Nous avons discuté au chapitre V la difficulté relative à la partie entière du numéro d'ordre de la frange et montré que, dans les conditions d'emploi ordinaire, cette partie entière est zéro; qu'exceptionnellement elle peut être ± 1 dans des cas faciles à reconnaître.

Cherchons maintenant la valeur exacte du retard pour la frange de repère.

Avec une source peu éclatante, qui ne donne pas de franges très fines, j'ai été conduit à donner aux traits entre lesquels je ramène la frange sombre un écart égal à $\frac{1}{6}$ environ de l'écart des franges; un retard de $\pm \frac{\lambda}{12}$ produit donc encore sur l'œil une impression très peu lumineuse. Dans l'expression de l'intensité

$$I = A^2 \sin^2 \frac{\pi \rho}{\lambda},$$

le retard peut en effet atteindre cette valeur sans que l'intensité atteigne le dixième du maximum. Dans ce domaine sombre, comment pointe-t-on? Lorsque les spaths ne sont pas rigoureusement parallèles, la bande sombre est bordée d'un côté par un très mince liseré rouge, de l'autre par un très mince liseré vert bleuâtre, et c'est la partie incolore que l'on s'efforce de placer bien symétriquement au milieu des traits. Cette partie incolore, c'est la frange *achromatique*, que définit la condition

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\frac{\rho}{\lambda} \right) = \frac{\lambda \rho' - \rho}{\lambda^2} = 0,$$

$$\lambda(\rho'_1 i + \rho'_2 j + \rho'_0 x) - (\rho_1 i + \rho_2 j + \rho_0 x) = 0.$$

Une fois le pointé fait, on a :

$$x = 0,$$

et, par conséquent,

$$(\rho_2 - \lambda \rho'_2) j_b + (\rho_1 - \lambda \rho'_1) i_b = 0 \quad (\lambda = 550)$$

au lieu de

$$\rho_2 j + \rho_1 i = 0, \quad (\lambda = 550)$$

que donnerait une source monochromatique.

Ainsi, avec la source blanche, on a :

$$\left(\frac{i}{j}\right)_b = -\frac{\rho_2}{\rho_1} \frac{1 - \lambda \rho'_2 : \rho_2}{1 - \lambda \rho'_1 : \rho_1} = \left(\frac{i}{j}\right)_{\lambda_0} \frac{1 - \lambda \rho'_2 : \rho_2}{1 - \lambda \rho'_1 : \rho_1}.$$

Si on compte i en secondes d'arc du spath et j en divisions *corrigées* de la vis micrométrique, on a donc pour une division, sous l'incidence normale,

$$0'' 845 \frac{1 - 0,075}{1 - 0,138} = 0'' 845 \times 1,073 = 0'' 907,$$

employant les valeurs théoriques de $\lambda \rho' : \rho$ données au chapitre V, p. 77.

La correction théorique atteint $\frac{1}{14}$, mais nous avons eu l'occasion de reconnaître, à propos du changement de rang de la frange de repère, que les indications théoriques sont plus de deux fois trop fortes pour la lampe à huile-pétrole en raison du rapide accroissement de la dispersion avec la longueur d'onde. Si le rapport était le même $\frac{33}{14}$ pour la marche lente de la frange de repère, l'angle par division serait sensiblement

$$0'' 845 + \frac{14}{33} (0'' 907 - 0'' 845) = 0'' 871.$$

C'est cette valeur qui me paraît la plus probable; encore ne faut-il la regarder comme définie qu'à 2 ou 3 unités près du dernier ordre, eu égard aux variations de coloration possibles de la flamme.

Il est donc nécessaire de faire un étalonnage direct en angle du spath avec la source éclairante usuelle.

Remarque. — Lorsque la frange achromatique tombe dans la région brillante des franges de longueur d'onde moyenne, le pointé perd de sa précision, et il est impossible de définir théoriquement le repère que l'on adopte; mais on peut dans ce domaine retrouver la même précision en tournant le nicol analyseur de 90 degrés, ce qui permute les franges lumineuses et les franges sombres et donne de nouveau une frange sombre peu colorée.

GRADUATION DIRECTE DE LA VIS MICROMÉTRIQUE EN ANGLES DE ROTATION DU SPATH S_1 ET DU BALANCIER. — Une graduation directe a été effectuée en juillet 1903, comme on va le décrire :

L'appareil auxiliaire, fig. 10, pour les très petites rotations du point d'attache du ruban de torsion a été mis en place, et les mouvements de son alidade OA commandés par l'intermédiaire d'un palmer⁽¹⁾ dont chaque dixième de millimètre produit une rotation d'à peu près 10^{-3} ou 200 secondes.

Sur la pince d'attache du ruban a été fixé un miroir, pour lire les rotations par la méthode de Gauss. Une échelle de verre divisée en millimètres a été installée pour cela à une distance qui, mesurée à l'aide d'un fil de laiton tendu, a été trouvée de 4698 millimètres. Par réflexion, un déplacement de l'image réfléchie de 1 millimètre vaut donc en angle $1,0643 \cdot 10^{-4}$ soit $21''953$; on lit la position au dixième de millimètre au moyen d'une lunette à réticule, soit à 2 secondes près. Le balancier, étant librement sus-

⁽¹⁾ Je n'avais pas encore imaginé la commande beaucoup plus douce et plus

délicate par fil tendu décrite au chapitre précédent.

pendu, tourne du même angle que le support de son fil de torsion. On lit en même temps, en lumière blanche, le déplacement du quartz compensateur Q_2 qui correspond à la rotation du balancier. On a opéré ainsi sous différents angles de serrage du quartz Q_2 .

Le montage, un peu sommaire, ne comportait pas une très grande précision. En outre, tout repose sur la supposition que dans chaque expérience le balancier avait atteint sa position d'équilibre exacte.

Pour comparer les résultats à la théorie, on a corrigé les lectures de l'erreur de tangence; puis on a pris pour chaque intervalle (d'environ 500 divisions de la vis) le quotient du déplacement lu sur l'échelle par le nombre de divisions de la vis. Ce quotient représente l'angle de rotation du spath par division de la vis, au voisinage d'une incidence définie par l'angle de serrage du quartz Q_2 et le nombre de tours de vis. Pour le ramener à l'incidence zéro, on a fait la correction théorique en divisant par le facteur $\delta f : \delta f_0$ du tableau III, p. 101. On a obtenu ainsi les nombres suivants, qui représentent l'angle de rotation du spath (en divisions de l'échelle lointaine) pour une division de la vis micrométrique sous l'incidence zéro sur le quartz.

I sur Q_2 .	ANGLE CORRIGÉ PAR DIVISION de la vis.	I sur Q_2 .	ANGLE CORRIGÉ PAR DIVISION de la vis.
— 16° 4	0,0400	+ 9° 5	0,0389
— 11° 5	382	+ 10° 3	399
— 7° 1	400	+ 11° 5	389
— 6° 7	386	+ 12° 5	402
— 2° 6	382	+ 15° 1	396
— 2° 5	390	+ 16° 9	403
+ 1° 8	392		
+ 2° 5	402		
+ 5° 8	410		
			<hr/>
			Moyenne 394
			<hr/>

Ces nombres ne présentent plus de marche systématique, ce qui indique l'exactitude de la correction d'incidence sur le quartz.

Leur valeur moyenne 0,0394 donne

$$21'' 953 \times 0,0394 = 0'' 865$$

par division de la vis micrométrique sous l'incidence normale.

Les six derniers nombres pour lesquels le facteur de la correction varie à peine donnent même la moyenne 0,0396, conduisant à 0'' 870, indépendante de toute incertitude relative à l'incidence sur le quartz (même de plusieurs degrés).

Toutefois, l'incidence sur le spath étant en réalité $-1^{\circ} 45$, cela conduirait à 0'' 871 pour l'incidence normale.

La source était une petite lampe à essence minérale.

Plus récemment (août 1906), un autre mode de détermination a été employé.

Les deux tubes verticaux qui supportent l'un le ruban de torsion et le balancier, l'autre tout le système optique, ont été séparés du reste de l'appareil et montés sur une planche épaisse percée d'un trou pour laisser passer la tige du balancier.

Cette planche a été posée par ses deux extrémités sur deux solides trépieds, entre lesquels on a placé un support pour le cercle horizontal d'un théodolithe Gambey. Au moyen de lièges, le balancier a été rendu solidaire de l'alidade, qui l'entraîne d'angles connus; les deux verniers excellents donnent les 5 secondes. Si la stabilité de l'installation était parfaite et si les franges étaient aussi pures qu'avec le balancier libre, l'étalonnage pourrait être très bon.

Enfin, dans le montage sur la planche, le repérage du tube qui porte les quartz par rapport à celui qui porte le fil de torsion et le spath est assez grossier. Aussi l'incidence sur les quartz n'est-elle pas bien connue, ce qui rend la correction d'incidence peu sûre sous les incidences négatives.

En voici les résultats discutés comme les précédents. La valeur d'une division en secondes d'arc est obtenue directement par les lectures sur le cercle divisé.

1.	$\left(\frac{\delta i}{\delta n} : \frac{\delta f}{\delta f_0}\right)$	
— 25° 6	0,86	} 0,874
— 20° 4	0,92	
— 15° 3	0,84	
— 15°	0,89	
— 10° 4	0,91	} 0,89
— 6° 1	0,87	
— 6° 1	0,885	
— 2° 0	0,915	
+ 2° 0	0,890	} 0,900
+ 5° 5	0,900	
+ 4° 9	0,845	
+ 8° 9	0,882	
+ 12° 9	0,838	} 0,856
+ 16° 4	0,865	
+ 14° 9	0,835	
+ 18° 7	0,885	
+ 22° 5	0,855	} 0,861
+ 26° 1	0,870	

MOYENNE GÉNÉRALE : 0"875.

La moyenne générale est 0"875. La moyenne des huit derniers nombres, qui ne sont pas affectés par une erreur d'incidence même considérable sur le quartz, est 0"858.

Un second groupe d'expériences a été fait en réglant minutieusement les incidences et en mesurant l'incidence sur le spath par des procédés qu'il serait trop long de décrire; il a conduit aux résultats suivants :

I_0	$\frac{\delta i}{\delta n} : \frac{\delta f}{\delta f_0}$	OBSERVATIONS.
1°	0"856	Moyenne sous l'incidence — 2°5 : 0"858.
0°9	0"865	
— 2°5	0"857	Moyenne ramenée à l'incidence normale sur le spath : 0"871.
— 2°7	0"845	
— 5°8	0"858	

L'incidence sur le spath était $-2^{\circ}5$, le sens positif étant défini par la direction de son axe à $+45$ degrés.

Dans l'appareil, l'incidence sur le spath est $-1^{\circ}4$, ce qui ramène à $0''865$ pour le spath en place; c'est-à-dire exactement à celle observée en 1903.

L'accord de ces diverses séries de mesures est très satisfaisant. La valeur finale pour l'incidence normale sur le spath est exactement celle que nous avaient donnée les considérations théoriques combinées avec l'évaluation expérimentale de la dispersion.

Nous pouvons donc adopter avec confiance, pour l'incidence moyenne ($-1^{\circ}4$) dans l'appareil, la valeur $0''865$ et la regarder comme exacte à $\frac{1}{500}$ près.

Toutes corrections faites : 1 division vaut $0''865$.

Par conséquent (chapitre II, éq. VII, p. 27), l'équation finale de l'appareil est :

$$\begin{aligned} \text{(VIII)} \quad \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \sin 2(\alpha - \alpha_1) &= -1,2514 \cdot 10^{-12} \times 0''865 \cdot n \\ &= -1,093 \cdot 10^{-12} n, \end{aligned}$$

n étant le nombre de divisions complètement corrigé, comme il a été dit p. 97 et p. 100, ou p. 106.

Je ne pense pas que l'incertitude sur le coefficient atteigne $\frac{1}{500}$.

Conclusion. — De toute cette longue discussion, il résulte que pour avoir une précision supérieure au millième, peut-être de beaucoup, il suffira d'employer des spaths taillés sous l'angle de $53^{\circ}5$, épais pour le balancier, minces pour le compensateur.

De cette façon, toutes les difficultés d'incidence et d'achromatisme seront évitées.

CHAPITRE VIII.

MAGNÉTISME DU BALANCIER.

ÉTÉ 1902 (JUIN-OCTOBRE).

Il importe de rendre négligeable l'influence du magnétisme terrestre sur le balancier mobile; cette influence peut intervenir de deux manières distinctes :

Si le balancier possède un moment magnétique permanent M le champ terrestre H produit un couple $MH \sin(\alpha_H - \alpha_M)$ qui change de signe par une rotation de 180 degrés de tout l'appareil;

Si le balancier a une perméabilité magnétique appréciable, le champ terrestre H produit un couple proportionnel à $H^2 \sin \alpha \cos \alpha$, en appelant α l'angle du champ terrestre avec la longueur du balancier. Ce couple, qui obéit à la même loi angulaire que le couple dû à la gravitation, serait très gênant s'il était sensible.

Pour savoir à quoi m'en tenir, j'ai produit autour de l'appareil un champ magnétique plus intense que le champ terrestre, et variable à volonté. M. d'Arsonval m'a prêté un grand solénoïde formé de 18 tours d'un ruban de cuivre enroulé sur une grande cage d'osier cylindrique de 0 m. 95 de diamètre et 1 m. 48 de longueur. La cage d'osier a été posée horizontalement sur un trépied de laboratoire en bois et maintenue par quatre jambes en bois. Des cales de hauteur convenable, reposant sur le trépied, à travers les mailles de la cage d'osier, supportent tout l'appareil de manière que le balancier soit à mi-hauteur et au milieu du solénoïde. L'appareil peut tourner entièrement dans le solénoïde sans buter et les larges mailles de la cage d'osier permettent de faire des lectures dans tous les azimuts, assez aisément suivant l'axe et perpendiculairement à l'axe, plus difficilement à 45 degrés de l'axe parce que l'on ne peut plus approcher suffisamment la tête de l'œilleton soit au dehors, soit en dedans du solénoïde.

La longueur du balancier est à peu près le tiers du diamètre, le cinquième de la longueur du solénoïde; le champ est suffisamment uniforme dans la région où il se meut.

Ce champ est, en C. G. S. : $1,28 i$, ou, en comptant i en ampères : $0,128 i_A$.

Le champ terrestre horizontal est environ $0,2$.

Résultats. — Le balancier étant orienté à peu près suivant la longueur du solénoïde avec un courant de 13 ampères (champ $1,66$) on obtient une déviation de 41 divisions et de -45 divisions en renversant le courant.

L'effet principal indique une aimantation permanente du balancier, perpendiculaire à sa longueur; le pôle Sud est du côté de l'œil, le pôle Nord du côté de la lampe. Dans le champ terrestre, l'action sera réduite dans le rapport de $\frac{0,2}{1,66} = 0,12$.

Lorsque l'observateur a le Nord magnétique à sa gauche, et regarde l'Est, il y a donc $-5,2$ divisions dues au champ magnétique terrestre; ce champ varie assez peu et est assez faible pour qu'on puisse adopter cette correction permanente.

La petite dissymétrie de 4 divisions paraît certaine; elle est due à une aimantation induite transversale dont le couple ne change pas de signe par le renversement du courant. Réduite dans le rapport des carrés des champs magnétiques ($0,0144$) elle est tout à fait négligeable dans le champ terrestre.

Le balancier étant orienté perpendiculairement au solénoïde, un courant de 5 ampères produit une déviation imperceptible dans un sens, et à peu près -10 divisions dans l'autre sens. L'effet, dû à une aimantation permanente longitudinale du balancier, serait donc de ± 5 divisions pour un champ $0,64$; le pôle Nord de l'aimant est à gauche de l'observateur. Dans le champ terrestre, lorsque l'observateur vise le Nord magnétique, cela produira une déviation de $+1,6$ divisions. Quant à l'aimantation induite, l'effet -5 divisions, réduit dans le rapport du carré des champs, tombe à $\frac{1}{2}$ division tout à fait négligeable.

Enfin, le balancier étant à 45 degrés du champ, un courant de 9 ampères donne des déviations sensiblement symétriques, ± 15 divisions, indiquant un pôle Nord à droite et en avant de l'observateur. C'est bien la direction qui résulte des deux aimantations rectangulaires inégales précédemment observées. Dans le champ terrestre, l'observateur visant le N. E., la déviation sera $-2,7$ divisions. C'est bien celle que l'on peut calculer à partir des deux autres déviations :

$$-5,2 \cos \frac{\pi}{4} + 1,6 \sin \frac{\pi}{4} = -2,55.$$

La déviation due à l'aimantation induite par le champ terrestre est encore ici insensible.

Soit donc α_0 l'angle indiqué par l'index lorsque l'observateur vise le Nord magnétique; α l'angle lu pour une autre position quelconque; cet angle croît quand l'appareil tourne dans le sens direct, du Nord vers l'Est.

On aurait donc à peu près :

$$\text{Déviation magnétique} = -5,2 \sin(\alpha - \alpha_0) + 1,6 \cos(\alpha - \alpha_0).$$

Dans ces premières expériences, la direction du champ magnétique n'avait pas été repérée avec assez de soin. En les reprenant, il a paru que le second terme, sans être tout à fait nul, était trop petit pour être déterminé avec certitude; et que d'ailleurs l'amplitude était correctement évaluée. Lors donc qu'on compte bien les angles $\alpha - \alpha_0$ à partir de l'azimut α_0 qui correspond au Nord magnétique, on peut adopter en toute sécurité la formule :

$$\text{Déviation magnétique} = -5,5 \cos(\alpha - \alpha_0).$$

Si l'on veut mettre en évidence l'influence du champ magnétique H , il faut multiplier par $\frac{H}{0,2}$; si l'on veut tenir compte du

changement du couple de torsion, le moment d'inertie étant invariable, il faut multiplier par $\frac{T_0^2}{T^2}$; T , T_0 sont les périodes d'oscillation, en un même lieu, pour une même orientation du balancier puisqu'une part appréciable du couple directeur est fournie par les actions newtoniennes avoisinantes. Ces deux facteurs ne peuvent jamais différer assez de l'unité, à moins d'un changement du ruban de torsion, pour qu'il y ait lieu d'en tenir compte; c'est à peine si la correction de magnétisme doit être faite dans la plupart des cas, eu égard aux incertitudes qui proviennent de la détorsion spontanée du ruban, même lente.

Expériences de contrôle. — Pour contrôler le signe de l'aimantation, j'ai fixé, avec un peu de cire molle, au-dessus du spath mobile, un petit aimant de signe connu formé par un bout d'aiguille d'acier de 17 millimètres de longueur sur 1 millim. 5 de diamètre. J'avais pensé aussi à la possibilité de compenser l'aimantation du balancier par un petit aimant auxiliaire; mais le moment magnétique de ce bout d'aiguille, bien que faiblement aimanté, était environ 1200 fois celui de mon balancier; il m'a paru alors que je risquais de plus grandes incertitudes en tentant la compensation, et j'y ai renoncé.

Dans un premier appareil, j'avais fait faire le balancier en aluminium; mais il était beaucoup trop magnétique. Par raison d'économie, en remplaçant le balancier d'aluminium par un balancier de cuivre, j'avais conservé néanmoins la monture d'aluminium qui enchâsse le cube de spath mobile; des essais accessoires, en produisant un champ magnétique peu volumineux autour de cette monture seule, m'ont confirmé dans l'opinion que presque tout le magnétisme permanent du balancier est localisé dans cette petite masse d'aluminium. Dans un autre appareil, il faudrait n'employer que du cuivre ou du laiton, bien vérifié auparavant.

CHAPITRE IX.

LE TUNNEL DU SIMPLON.

Programme des recherches à faire. — L'action qu'une masse isolée exerce sur l'appareil décroît en raison inverse du cube de la distance; une masse de 1 tonne à 2 mètres de distance donne ± 25 divisions, comme 1,000 tonnes à 20 mètres ou 10^6 tonnes à 200 mètres. L'action mesurée est donc surtout une action locale, dans laquelle les cavités ou les reliefs les plus voisins, même minimes exercent une influence égale à celle d'énormes masses lointaines.

Pour pouvoir tirer des mesures quelques conclusions un peu générales, il faut pouvoir éviter, éliminer, ou calculer les actions locales.

Dans un tunnel, en particulier, la distinction des différentes actions peut être particulièrement nette :

- 1° Action proche, due au tunnel; calculable;
- 2° Action lointaine, due au relief du sol; calculable également, en supposant la densité uniforme;
- 3° Action intermédiaire, des irrégularités de constitution interne du sol : inégalités de densité, soit distribuées d'une manière continue, soit localisées.

Non seulement les deux premières actions sont calculables, pourvu que l'on possède exactement les données de construction du tunnel et la carte topographique du pays; mais elles possèdent certains caractères, qui permettent de les distinguer.

Le tunnel est généralement rectiligne; il a généralement un plan de symétrie vertical; ou du moins les écarts de la symétrie (niches, caniveaux, etc.) sont minimes, et leur influence est facile à évaluer. On placera donc l'appareil dans le plan de symétrie, et

si l'on peut, à la hauteur qui rend l'action du tunnel maximum ou minimum, c'est-à-dire un peu au-dessous du milieu de la hauteur du tunnel, avec la forme ordinaire en voûte. Les plans des courbures principales dues au tunnel sont le plan de symétrie et le plan perpendiculaire; toute déviation des plans des courbures principales du géoïde est due aux actions lointaines intéressantes. En outre, l'action du tunnel est d'ordinaire à peu près constante.

L'action lointaine du relief du sol supposé homogène peut varier considérablement suivant la longueur du tunnel; mais cette variation est continue, partout où la surface du sol reste éloignée du tunnel. Si l'on constate des inégalités considérables de 100 en 100 mètres, dans une région où plus de 1500 mètres d'épaisseur surmontent le tunnel, ces inégalités sont certainement dues à des excès ou à des défauts de masse intérieurs, dont on peut alors déterminer approximativement l'importance et la position.

Ces indications précisent le plan de travail à adopter suivant les résultats qu'on veut obtenir :

Si l'on se borne à chercher en fait quel est le retentissement du relief d'un terrain montagneux sur les courbures du géoïde le long du tunnel, il suffit d'une vingtaine de mesures espacées de kilomètre en kilomètre dans un tunnel long et profond comme celui du Simplon. Mais il n'y aura aucune conclusion *précise* à tirer des écarts entre les observations et les résultats calculés d'après la carte, à moins que ces écarts ne soient réguliers et certains, et ne doivent être rapportés à quelque action considérable et profonde.

Si l'on veut obtenir des renseignements d'ordre géologique, sur l'importance et la position approximatives des grandes inégalités de densité, il faut, au moins dans les régions naturellement indiquées par l'abondance des sources, ou par la nature des roches, faire des mesures beaucoup plus nombreuses; de 100 en 100 mètres par exemple. Cela ferait environ 200 mesures dans un tunnel comme le Simplon, pour une étude approfondie sur toute sa longueur.

J'ajoute que les mesures devraient être complètes, c'est-à-dire

donner les 4 dérivées secondes que les appareils de torsion permettent d'atteindre, la différence des courbures et leur orientation par l'appareil à balancier horizontal, et, par le second appareil, à balancier incliné, le gradient de pesanteur et sa direction.

Programme réel. — Mon programme était beaucoup plus modeste, et moins défini; il s'agissait simplement de savoir quelles sont les conditions de travail dans un tunnel profond et long, si l'appareil s'y comporte bien, s'il n'y a pas de difficultés spéciales imprévues, si les mesures précises y sont possibles, et, accessoirement, de faire les mesures les plus nombreuses possibles dans des conditions variées. Le tunnel était mis à la disposition de la Commission géodésique suisse pour la mesure de longueur pendant 5 jours, soit 120 heures. Pendant ce temps, les trains devaient partir toutes les huit heures de Brigue jusqu'au point atteint par la mesure, pour le changement des trois équipes de géodésiens; au delà, du côté d'Iselle, il ne devait y avoir aucune circulation de trains. En outre, presque tout travail devait être interrompu dans le tunnel pendant ce temps.

En réalité, c'est seulement dans la région non atteinte par la mesure, au delà d'Iselle, que je pouvais compter sur la tranquillité qui me semblait nécessaire, soit environ 48 heures; car la Commission géodésique devait atteindre le portail de sortie d'Iselle, et faire le rattachement avec l'observatoire du Sud pendant la troisième journée. Ensuite, le travail devait reprendre, au moins par places du côté d'Iselle, pendant le retour de la Commission vers Brigue, et peut-être empêcher toute mesure. Il s'agissait donc de tirer bon parti de ces 48 heures; ce qui ne comportait pas un programme bien vaste.

Action prévue du tunnel. — Tout d'abord, il fallait pouvoir éliminer l'action propre du tunnel. C'est alors que je regrettai de n'avoir pas construit l'appareil à balancier incliné, qui donne le

gradient horizontal de la pesanteur $\left(\frac{\partial g}{\partial s}\right)$ par des torsions dont la période est d'un tour, 2π ; car cet appareil est insensible à une distribution de masses avec la période d'un demi-tour, π . Sur cet appareil des masses diamétralement opposées se compensent exactement; un tunnel uniforme est sans action; dans l'axe du tunnel, un peu loin des excavations latérales, niches ou chambres, l'action propre du tunnel serait nulle; les mesures porteraient directement sur les actions intéressantes, lointaines et intermédiaires. C'est cet appareil qui est le véritable appareil à employer dans les tunnels.

Toutefois, l'appareil à balancier horizontal peut dans une certaine mesure présenter le même avantage. En raison de la symétrie du tunnel, les torsions observées lorsque le levier est parallèle ou perpendiculaire au plan du tunnel ne dépendent que des actions lointaines et intermédiaires, tandis que les torsions observées lorsque le levier est à 45 degrés de l'axe du tunnel dépendent du tunnel lui-même.

Mais de quel ordre de grandeur sont ces actions? Est-il nécessaire d'être dans le plan de symétrie, et plus généralement avec quelle précision faut-il connaître la position de l'appareil? Avec quelle précision faut-il connaître la construction du tunnel?

Quelques calculs préliminaires me donnèrent de fortes inquiétudes. En voici les résultats principaux. Une galerie circulaire, de diamètre quelconque, dans une roche indéfinie de densité 2,5, donnerait ± 800 secondes environ, uniformément dans toute sa section droite. C'est une grosse déviation presque à la limite de course de ma vis micrométrique, et qui passerait presque à 1,000 divisions à travers le Simplon dont la densité dépasse 2,7; je craignis un moment de n'obtenir d'autre résultat que de médiocres mesures de la densité de la roche en place. Au moins, la position de l'appareil dans la section droite d'un tunnel circulaire était-elle indifférente.

Mais le tunnel vrai, avec sa section allongée en hauteur, coupée par un radier à la base; avec son ballast, avec ses voûtes, et le

remplissage irrégulier compris entre les éclats du roc et l'extrados de la voûte; qu'allait-il donner?

Un excès d'un dixième du diamètre vertical sur le diamètre horizontal augmente l'action d'un vingtième, soit 40 à 50 divisions au centre du tunnel, et détruit son uniformité dans la section. Les inégalités d'épaisseur de la maçonnerie, si sa densité diffère de celle du roc, et surtout le remplissage entre l'extrados et le roc, peuvent également changer l'action du tunnel d'une dizaine de divisions; peut-être davantage. Si on pose le trépied de bois directement sur le ballast, les 40 centimètres de ballast de densité 2 produiront environ 70 divisions!

Je fus sur le point de renoncer au voyage. Des renseignements détaillés trouvés dans l'*Engineer* (1900-1904) sur le mode de construction me convainquirent que je trouverais dans les dossiers de l'Entreprise les documents précis nécessaires pour un calcul exact de l'action du tunnel en chaque station d'observation, pourvu que la position de l'appareil dans la section droite fût suffisamment définie.

Projet de train géodésique. — Je m'arrêtai alors au projet suivant, qui me paraît encore le plus favorable aux observations rapides et précises, mais que je ne pus mettre à exécution, comme on le verra par la suite.

Le trépied de bois serait installé au centre d'un truc à ballast, et y serait solidement fixé et boulonné avec des intermédiaires de feutre, suivant une disposition dont je connais l'efficacité; l'appareil serait installé en permanence sur le trépied. De cette manière, aucun délai de mise en place; l'orientation, le centrage, l'altitude de l'appareil au-dessus du ballast seraient toujours les mêmes; enfin, en mettant deux tas de briques de 4 ou 5 tonnes aux extrémités du wagon de ballast, il serait possible de compenser en grande partie l'action du vide du tunnel, tout en conservant la place de tourner autour de l'appareil pour les observations dans les divers azimuts. Un cheval aurait traîné facilement le wagon, du

moins sans les briques de compensation. On immobiliserait le wagon au moyen des freins et de sabots, et on verrait à caler les ressorts, pendant les mesures, si leur flexion était trop sensible aux déplacements de l'observateur avec l'azimut.

Les briques de compensation auraient l'avantage de rendre les erreurs relatives moins importantes dans la comparaison des diverses stations; mais elles ne remédient pas aux variations dans la constitution du tunnel, et à la nécessité d'un calcul détaillé de cette action en chaque station.

Aussitôt arrivé, je m'aperçus que ce projet était irréalisable au Simplon, pour bien des raisons; d'abord l'interdiction réglementaire d'introduire des chevaux dans le tunnel; ensuite l'interdiction de stationner sur la voie sans être protégé des deux côtés à 200 mètres de distance par des employés⁽¹⁾ des chemins de fer fédéraux munis de lanternes rouges. A vrai dire, du côté d'Iselle, pendant les deux premiers jours je pouvais me considérer comme protégé contre le passage des trains, qui tous partent de Brigue, par la présence de la Commission géodésique sur la voie même. Mais un autre genre d'accidents était à craindre; des draisines, et des wagonnets, qu'on peut rejeter sur le côté de la voie, sont employés par les groupes d'ouvriers pour le transport de leur matériel; comme rien n'interdisait le travail de quelques groupes isolés loin de la Commission géodésique, il aurait pu arriver que quelque wagonnet ainsi utilisé circulât sur la voie, ou même en descendît seul sur la pente de 0, 7 p. 100, et comme le tunnel est très sombre et très sourd, l'installation sur la voie représentait pour l'appareil un risque de destruction qui m'a paru excessif, si invraisemblable qu'il fût. J'ai pourtant fait deux observations sur la voie comme on le verra plus loin, à titre d'essai; mais j'y ai renoncé pour d'autres raisons encore.

⁽¹⁾ Trop incertain des résultats pour demander une subvention à l'avance, j'avais entrepris l'excursion à mes frais, et j'hésitais à payer beaucoup de journées d'auxiliaires, d'autant plus que pour

bien utiliser les cinq journées disponibles, j'étais décidé à ne pas me contenter de la journée simple de huit heures de travail réglementaire sur les chantiers.

Pour en revenir à mon projet de wagon géodésique, c'est encore aujourd'hui l'installation qui me paraît la meilleure, surtout depuis que j'ai vu les trains des poseurs-électriciens, — pourvu que le train géodésique soit organisé à l'avance, par une commission officielle, d'accord avec l'entreprise des travaux. Chaque wagon serait consacré à un appareil : balance de torsion horizontale — balance de torsion inclinée; — gravimètre de Mascart, et gravimètre à ébullition; gravimètre de Threlfall et Pollock; pendule à indications rapides⁽¹⁾.

Ce même train géodésique pourrait être employé sur tout le réseau des voies ferrées, les jours et heures d'interruption du service public par quelque cause que ce soit, repos dominical, accident ou réparation d'une partie de la voie, etc.

Organisation réelle du travail. — Mis en relation par M. Guillaume, dès mon arrivée, avec M. Rosenmund, le distingué professeur au Polytechnicum de Zurich, qui a exécuté toute la triangulation du Simplon, dirigé les mesures de pesanteur, et donné avec une si remarquable précision la direction des deux moitiés du tunnel, j'ai trouvé auprès de lui le concours le plus cordial. Bien que chef de l'une des équipes de la mesure de longueur, préparée sur place par ses soins, M. Rosenmund, grâce à ses habitudes d'activité méthodique et toujours calme, a toujours trouvé le temps et le moyen de me rendre le travail facile. Je dois ajouter que j'ai trouvé, grâce à lui, l'accueil le plus empressé auprès de M. Isaak, ingénieur des travaux du tunnel à Brigue, et de son collaborateur, M. Peter, ainsi que près de M. Rolla, ingénieur des travaux du tunnel à Iselle.

Après déballage, réglage du zéro dans le petit observatoire installé à Brigue par M. Rosenmund pour donner la direction de la moitié nord du tunnel, je me transportai avec tout mon matériel

⁽¹⁾ Un emploi raisonné de feutre et d'ouate, en grande quantité dans les supports du pendule, peut très bien

permettre d'installer le pendule dans un wagon.

à Iselle, le samedi soir 17 mars, par le dernier train qui traversât tout le tunnel avant le commencement des mesures de base. Sur l'avis de M. Rolla et de M. Peter, je reconnus que, pour des essais, rien ne vaut une équipe d'hommes robustes et intelligents. L'appareil fut rechargé le soir même sur le train de retour, et déposé, par les soins de M. Peter dans la chambre du kilomètre 9 à partir d'Iselle, où il passa la nuit.

Ne pouvant opérer au milieu du tunnel, sur la voie, pour les raisons réglementaires que j'ai déjà indiquées du côté d'Iselle, et du côté de Brigue pour la raison plus péremptoire encore du passage des trains toutes les 8 heures, avec arrêts plus ou moins prolongés, je m'étais décidé à m'installer dans les chambres kilométriques, plus avantageuses à certains égards que le tunnel lui-même.

Ces chambres sont creusées dans la paroi S.-W. du tunnel, de kilomètre en kilomètre. Les chambres les plus nombreuses, appelées *petites chambres*, ont environ 3 mètres sur 3 horizontalement, et 3 m. 10 de hauteur au centre; elles sont entièrement maçonnées; leurs parois sont verticales; le sol, cimenté, est horizontal; la voûte, perpendiculaire au tunnel, a une flèche de 60 centimètres seulement. Ces chambres ont donc une section horizontale carrée sur presque toute leur hauteur; leur action propre sur un appareil placé au croisement des diagonales horizontales est donc très petite, due surtout à la voûte. L'action du tunnel, à 4 mètres environ de son axe, est de ± 400 divisions environ, [de signe contraire à son action intérieure].

L'action locale parasite ne doit donc être que la moitié au plus de celle du tunnel et elle conserve la même propriété précieuse d'avoir pour plans de symétrie les plans verticaux parallèle et perpendiculaire au tunnel.

De 5 en 5 kilomètres (aux kilomètres 2 et 7 à partir d'Iselle) ces chambres sont remplacées par de plus vastes, dites *grandes chambres*, qui sont moins avantageuses. Leur section horizontale (4 m. \times 6 m.) n'est pas carrée; au point de rencontre des diagonales, leur action propre n'est pas nulle; elle s'ajoute à celle du

tunnel et l'augmente notablement; heureusement elle a encore la même symétrie. Destinées à établir une large communication entre le premier tunnel, seul achevé, et le second tunnel parallèle, resté à l'état de galerie de petite section jusqu'à ce que le besoin d'une deuxième voie se fasse sentir, ces chambres ne sont pas murées sur la paroi verticale du fond, qui reste à l'état de roc irrégulier; d'où une petite indétermination dans leur action.

Néanmoins, ces grandes chambres peuvent encore bien servir aux mesures.

En face des grandes et des petites chambres, sont des cavités plus petites de 3 mètres de largeur sur 1 m. 50 de profondeur seulement appelées *niches* (paroi N.-E.), occupées par des installations électriques, — lanternes, — cloches, — signaux divers. — Elles étaient alors encombrées, le dallage du caniveau des câbles était enlevé sur une quinzaine de mètres de longueur devant elles.

Sur la même paroi que les grandes et les petites chambres (S.-W.), des *refuges* maçonnés, plus petits encore, sont espacés de 100 en 100 mètres. Enfin tous les 200 mètres, s'ouvrent des *traverses* obliques, qui vont du tunnel à la galerie parallèle. Ces traverses sont maçonnées aux abords du tunnel, et toutes fermées par des cloisons, depuis l'achèvement du tunnel, pour que l'aérage se fasse uniquement par le tunnel principal. L'incertitude sur les limites de la roche et de la maçonnerie, la complexité de la forme de raccordement entre les traverses et le tunnel, et surtout leur obliquité qui supprime la symétrie, les rendent inutilisables.

Les niches sont trop encombrées; les refuges sont trop petits; il ne reste donc que les chambres, grandes et petites.

C'est dans les chambres que j'ai travaillé.

Actions newtoniennes parasites. — Leur symétrie réelle laisse toutefois un peu à désirer, non du fait de leur construction, qui est achevée et régulière, mais par suite des autres travaux du tunnel. Dans plusieurs d'entre elles se trouvent soit dans un coin, soit au milieu d'une paroi, de petits tas de pierres ou de sable, d'un vo-

lume difficile à évaluer, dont je ne me suis pas suffisamment méfié; je me suis borné à en noter approximativement la position et l'importance; il aurait fallu les étaler uniformément.

Pour être sûr des corrections à une division près, il aurait fallu noter toute masse cubique de densité 2,5 dont le côté approche du cinquième de la distance à mon appareil.

Faute d'avoir cet énoncé simple présent à l'esprit, j'ai négligé quelques précautions ou quelques mesures qui auraient donné aux corrections toute la précision désirable.

Le tunnel seul a reçu sa provision de ballast; les chambres ne l'avaient point reçue au moment de mes expériences; le sol cimenté aurait donc dû être à nu, au-dessous du niveau de la voie; il ne l'était pas dans toutes; du ballast de la voie avait débordé en couche inégale formant une pente douce; lorsque la distribution en paraissait très inégale, on l'a égalisé grossièrement avec les pieds et les mains, et on a noté, à l'œil, les dénivellations. Ce ballast, d'ailleurs, n'était pas inutile à cause de l'humidité.

Les dalles qui recouvrent le caniveau, de l'autre côté du tunnel, étaient enlevées sur une longueur de 15 ou 20 mètres en face des chambres et elles avaient été portées près de la paroi S.-W., et tantôt dressées, tantôt posées à plat bout à bout, tantôt superposées, à peu de distance des chambres. La présence, la position et le nombre de ces dalles ont d'abord été notés lorsqu'ils étaient à l'entrée de la chambre, intérieurement. Puis, je les ai toujours fait enlever de la chambre et placer au dehors à quelque distance. D'une masse d'environ 100 kilogrammes, chacune de celles placées à l'angle de la chambre intérieurement pouvait produire ± 5 ou 6 divisions; en les plaçant au dehors et les espaçant, l'action totale était réduite certainement de moitié; il aurait pourtant mieux valu les éloigner de 2 mètres de plus.

Des rouleaux de 8 ou 10 grandes boucles de câble électrique se trouvaient aussi le long de la même paroi S.-W. du tunnel, mais assez loin des chambres pour n'avoir pas d'effet appréciable.

Enfin, pendant les mesures, j'avais d'abord laissé les hommes se

reposer hors de la chambre, tout près de l'ouverture; ils pouvaient exercer une action de 3 à 10 divisions, variable suivant leur groupement; je les ai plus tard renvoyés de l'autre côté du tunnel.

La nécessité de ces diverses précautions ne m'est apparue que peu à peu. Néanmoins les indications notées sur mon calepin, discutées dans chaque cas, ne laissent certainement pas subsister d'incertitude égale à 10 divisions.

Il aurait mieux valu se munir de pelles et pioches, déblayer le terrain dans un rayon de 6 ou 8 mètres et y rétablir chaque fois la symétrie avant de commencer les mesures.

Enfin, l'observateur, qui au laboratoire ou en terrain plat, se place facilement dans le plan de symétrie de l'appareil avec toute la précision nécessaire, est beaucoup plus gêné quand le sol est très inégal. Par un singulier oubli, je n'ai pas inscrit de renseignements complets sur ma position par rapport à l'instrument dans les différents azimuts; et, bien que le corps de l'observateur soit loin d'agir par toute sa masse, son action peut être notable à cause de la faible distance, — 3 à — 6 divisions, — 7 à — 8 au plus d'après des essais au laboratoire, lorsque l'incommodité du sol lui fait prendre une position trop dissymétrique. Peut-être est-ce là l'explication de quelques-unes des irrégularités apparentes de marche du zéro, alors que chacune des observations isolées donnait une bonne position d'équilibre.

C'est la pratique seule qui pouvait attirer l'attention sur la nécessité de tout cet ensemble de précautions minutieuses.

Position de l'appareil. — Origine des azimuts. — Grâce à la symétrie des chambres, il suffisait évidemment de placer l'appareil sensiblement au centre de ces chambres; c'est ce que j'ai fait d'abord en m'aidant des alignements en diagonale, et de mesures sur le sol avec le bâton de transport, plus tard, à l'aide d'un mètre pliant. Mais le choix de la position du trépied était dominé par la condition bien plus importante de reposer sur le sol formé par la couche de ballast grossier. Je ne me suis pas contenté de centrer à 1 déci-

mètre près environ; j'ai essayé de déterminer la position de l'appareil en même temps que l'origine des azimuts. Pour cela, je faisais placer par les aides la flamme d'une des lampes successivement le long de l'arête nord, le long de l'arête sud, au milieu du fond de la niche située en face de la chambre, je visais le milieu de la flamme au moyen de la petite lunette parallèle au balancier (LD, pl. III), et je lisais à $0^{\circ} 1$ près ces 3 azimuts.

Ces mesures fixent, après correction de parallaxe, la direction de l'azimut origine, parallèle à la longueur du tunnel vers Brigue. Si les lanternes sont exactement placées à 1 centimètre près par les aides, l'incertitude sur l'azimut ne serait que de $0^{\circ} 1$, en supposant que la position relative de la chambre, de la niche placée en face et de l'axe du tunnel soit correcte à la même précision de 1 centimètre. C'est une précision qu'il serait imprudent de supposer à la construction en maçonnerie; des inexactitudes de près de 1 décimètre ne sont nullement invraisemblables.

Quant à la position de l'axe de l'appareil, ces angles la déterminent très mal; des considérations géométriques élémentaires montrent que ces angles, qui sont fortement affectés par une petite erreur de position de la lanterne, ne le sont presque pas par le déplacement de l'appareil ⁽¹⁾.

⁽¹⁾ Le calcul complet n'offre aucune difficulté. Prenons comme origine des coordonnées du trépied un point situé sur la perpendiculaire à la paroi opposée du tunnel, élevée au milieu de la niche et à une distance de 650 centimètres de cette paroi pour les petites chambres et de 800 pour les grandes chambres.

Soit ω_1 l'angle dont on tourne le viseur en partant de l'arête N de la niche, jusqu'au milieu du fond, et ω_2 l'angle dont on tourne, depuis le milieu du fond jusqu'à l'arête S. Soit ξ la coordonnée du trépied parallèle au tunnel vers Brigue et η la coordonnée perpendiculaire vers le S.-W. Des données nu-

mériques qui précèdent on déduit facilement, en centimètres, par degré

$$\left. \begin{aligned} \xi &= -41,5 (\omega_1 - \omega_2) \\ \eta &= -25,9 (\omega_1 + \omega_2 - 26^{\circ}) \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{Petites} \\ \text{chambres.} \end{array}$$

et

$$\left. \begin{aligned} \xi &= -59,5 (\omega_1 - \omega_2) \\ \eta &= -38,5 (\omega_1 + \omega_2 - 21,25) \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{Grandes} \\ \text{chambres.} \end{array}$$

Il en résulterait une correction d'azimut origine, conséquence de l'erreur de position, égale à $-\frac{\xi}{750}$ pour les petites chambres et $-\frac{\xi}{900}$ pour les grandes.

Ces formules montrent qu'une diffé-

L'appareil étant toujours placé sur le même trépied de laboratoire rigide, sa hauteur au-dessus du sol est toujours la même, à 1 ou 2 centimètres près (1 mètre), car les différences ne dépendent que des inégalités du ballast, toujours égalisé avant d'y poser le trépied et des quelques millimètres des vis calantes. Toutefois l'incertitude sur la hauteur de l'appareil par rapport à la maçonnerie et par rapport au tunnel atteint peut-être une dizaine de centimètres; il aurait mieux valu mesurer chaque fois la hauteur du trépied au-dessus du ciment, en dégagant un peu le ballast, et la distance de l'appareil au sommet de la voûte.

L'azimut origine peut être considéré comme défini ainsi à $0^{\circ}2$, par rapport au tunnel, *tel qu'il est construit* dans la région voisine de chaque chambre; avec quelle précision par rapport à la direction générale du tunnel, c'est ce qu'il est assez difficile de dire. La ligne de repère choisie est en réalité celle qui va du milieu de la

rence $\omega_1 - \omega_2$ de 1 degré indiquerait une erreur de position ξ de 42 centimètres dans les petites chambres, 4 fois et demie plus grande que l'erreur de position des lampes ou de construction de la maçonnerie qui lui correspondrait.

En fait, les écarts observés ont été considérables et irréguliers; j'ai des raisons de les attribuer pour une bonne part à la maçonnerie elle-même. En effet, dans la chambre 1 de Brigue, après une mise en place soignée par rapport à la chambre, ne comportant pas d'erreur de position supérieure à 2 ou 3 centimètres, j'ai recommencé le lendemain une nouvelle mise en place (ayant trouvé le trépied hors de la chambre) avec le même soin.

Les angles observés

$$\begin{array}{lll} \omega_1 = 11^{\circ}3 & \omega_2 = 15^{\circ}1 & \text{le 1}^{\text{er}} \text{ jour} \\ \omega_1 = 11^{\circ}3 & \omega_2 = 15^{\circ}3 & \text{le 2}^{\text{e}} \text{ jour} \end{array}$$

montrent bien par leur accord le peu

de différence de position; ils donnent

$$\begin{array}{lll} \xi = +158^{\text{cm}} & \eta = -10^{\text{cm}} & \text{le 1}^{\text{er}} \text{ jour} \\ \xi = +166^{\text{cm}} & \eta = -15^{\text{cm}} & \text{le 2}^{\text{e}} \text{ jour} \end{array}$$

dont les différences minimales, 8 centimètres et 5 centimètres, sont bien dans les limites prévues d'après la mise en position; mais la valeur de ξ , plus d'un mètre et demi est fantastique! C'est évidemment dans la position des arêtes et du milieu de la niche, par rapport à la chambre, qu'est l'erreur, environ 4 fois et demie moindre, c'est-à-dire de 40 centimètres à peu près. Peut-être la ligne médiane tracée sur le mur était-elle fautive. D'une chambre à l'autre, les valeurs de ξ (corrigées des 14 centimètres dus à la lunette du viseur) varient de -30 centimètres à $+45$ centimètres; celles de η , de -47 centimètres à -8 centimètres; de telles variations ne peuvent être interprétées que comme résultant des irrégularités réelles, 4 fois moindres, de la maçonnerie.

chambre au milieu de la niche en traversant le tunnel; une erreur de construction de 1 décimètre entre les deux extrémités de cette ligne par rapport au tunnel, qui correspondrait à une erreur d'azimut de près de 1 degré, n'est pas impossible; l'orientation même du tronçon du tunnel voisin de la chambre, par rapport à laquelle les maçons ont construit les chambres et niches, n'est elle-même pas définie avec rigueur; car les contrôles géodésiques de direction grâce auxquels la rencontre des axes a été remarquablement précise n'avaient lieu qu'à plusieurs mois d'intervalle, pendant lesquels la construction pouvait suivre l'alignement théorique avec quelques sinuosités et brisures. Pour ces diverses raisons, je crois qu'une erreur de 1 degré sur l'azimut origine n'est pas impossible; peut-être même peut-elle être plus grande.

C'est une incertitude beaucoup trop forte et tout à fait imprévue. Lorsque je comptais opérer dans l'axe du tunnel, je comptais que la visée des ouvertures me fournirait une direction avec une précision superflue. Mais la solution est moins simple pour bien des raisons : les extrémités du tunnel sont courbes, du côté suisse pour le raccordement avec la voie extérieure qui lui est perpendiculaire; du côté italien pour que l'ouverture puisse être battue et détruite par un fortin convenablement placé⁽¹⁾.

On ne voit donc pas ces ouvertures de l'intérieur du tunnel. En outre, ces deux ouvertures sont fermées par d'épais rideaux qu'on soulève seulement à l'entrée ou à la sortie des trains ou des équipes d'ouvriers; ces rideaux sont en effet nécessaires pour que la masse d'air considérable lancée à une extrémité, aspirée à l'autre par de puissantes souffleries traverse effectivement les 20 kilo-

⁽¹⁾ C'est même une impression singulière pour le voyageur de passage, de trouver installés, dans le même hôtel de la compagnie du Simplon, à Iselle, prenant leurs repas à la même table, et en relations personnelles cordiales,

les ingénieurs suisses qui dirigent les travaux du tunnel et l'officier du génie italien qui surveille la construction des forts, mines, etc., préparés pour en assurer la destruction rapide.

mètres du tunnel au lieu de former de violents tourbillons près des orifices. Pour la même raison, les étroites galeries de direction qui, elles, prolongent exactement le tunnel, sont closes par des cloisons permanentes de bois, dont les portes furent ouvertes seulement pendant la mesure des extrémités de la base. Le tunnel est donc parfaitement sombre; c'est une idéale enceinte *noire*. Il était en outre extrêmement opaque, à l'époque de mes observations, et même ouvertes les ouvertures des galeries de direction auraient été invisibles.

Malgré tout, la direction était facile à obtenir dans le tunnel; une bonne lampe de mineur placée à 50 mètres au milieu de la largeur, comme je l'ai fait dans deux observations sur la voie, fixe la direction à $0^{\circ}1$ près si les ondulations du tunnel ne s'écartent pas de plus de 1 décimètre de l'axe théorique.

Précision des corrections locales. — Avec les indications, telles que je les ai notées dans chaque station, toutes les corrections relatives aux influences parasites peuvent être faites avec une précision suffisante; elles ne laissent pas subsister une incertitude supérieure à 2 ou 3 divisions; il serait plus agréable, lors de la discussion, de retrouver les renseignements les plus précis, comme je l'ai indiqué minutieusement, et de voir tomber l'incertitude restante, après ces corrections, au-dessous de la limite de précision des meilleures observations, soit 1 division.

Une incertitude du même ordre résulte de l'incertitude sur le gabarit du tunnel; les dimensions réelles d'une maçonnerie ne sont pas conformes au centimètre près à celles des plans d'exécution; encore moins l'excavation creusée dans le rocher. La densité des roches *en place*, la densité des matériaux de construction et du blocage *en place*, ne sont probablement pas définies à plus d'un centième près, et encore! Sur une action totale de 300 divisions dans les petites chambres et 900 divisions dans le tunnel, cela fait de 3 à 9 divisions d'incertitude environ. Tout cela sera discuté minutieusement au chapitre XII.

Conclusion. — Ainsi: 1 degré en azimut, 5 à 10 divisions en grandeur, ou plutôt $5,5$ à $11 \cdot 10^{-12}$ sur la différence des courbures évaluée en centimètres; telles sont les limites de précision faciles à atteindre, difficiles à dépasser dans l'évaluation des actions locales et parasites. Comme nous le verrons plus loin, ce sont aussi à peu près les limites de la précision obtenue dans les observations du Simplon, et les changements le long du tunnel sont assez rapides et assez grands pour que les résultats soient déjà très intéressants.

De là résulte une conséquence évidente : il aurait mieux valu obtenir cette même précision plus rapidement, avec un appareil plus léger, en conservant la même précision de lecture angulaire de la torsion et en réduisant la période à 3 secondes au lieu de 10, ce qui aurait permis d'aller à peu près trois fois plus vite. On aurait pu ainsi tripler à peu près le nombre des stations, mieux connaître le détail de la distribution du tunnel et déceler les plus importantes anomalies internes de la montagne.

Actuellement, c'est dans ce sens que doivent être dirigés les perfectionnements. La multiplicité des mesures est plus instructive que leur précision. Au lieu de la précision $3 \cdot 10^{-7}$ que donne mon appareil actuel dans de bonnes conditions, en exigeant environ 3 heures par station, il vaut mieux se contenter de 10^{-6} et faire trois stations dans le même temps avec un appareil plus léger; ce qui me paraît réalisable sans difficulté.

Voilà le premier résultat de ces quelques jours de travail sur le terrain, et non le moins important; c'est de fixer la limite de précision désirable et facile à obtenir et tout le détail des mesures accessoires à effectuer pour les corrections locales.

CHAPITRE X.

MARCHE DES OBSERVATIONS. — ORGANISATION; INCIDENTS.

Marche des opérations dans le tunnel. — Le dimanche 18 mars j'entrais dans le tunnel à 7 heures, conduit par le chef poseur des rails du côté sud, accompagné de quatre hommes, tous italiens; ils étaient munis de lanternes, de cordes et d'un bâton pour porter l'appareil en palanquin comme je l'ai expliqué (ch. III, p. 44), ainsi que de provisions pour la journée. Après deux heures de marche le long de la paroi Est du tunnel sur les dalles de grès qui couvrent le caniveau, je trouvai ma caisse et mon trépied au kilomètre 9, et me mis au travail. Le déballage, la vérification de l'état de l'appareil, le choix de la position du trépied, la recherche du meilleur moyen de définir l'azimut, me prirent, cette première fois, à peu près une heure.

J'allais commencer les mesures lorsque j'eus une surprise. Ma petite lampe à essence commença à flamber, une partie se dessouda et je dus l'éteindre précipitamment; je la remplaçai par une des lampes de mes hommes, un peu lourde et encombrante, un peu moins blanche, mais régulière, et je pus poursuivre les mesures sans encombre. Voici ce qui s'était passé : je n'avais pas emporté de Paris de l'essence minérale pour ma petite lampe, croyant en trouver partout; mais à Brigue et à Iselle j'en cherchai vainement; je ne trouvai que du pétrole ordinaire, qui brûle très mal dans cette petite lampe, genre Pigeon, ou de la « benzine pour automobiles ». Bien qu'elle me parut un peu volatile j'essayai cette dernière; elle donnait dans ma lampe une jolie flamme, et je m'en étais servi sans inconvénient dans l'observatoire du nord, le vendredi, pour les réglages. Mais dans le tunnel, au kilomètre 9, la température était de $29^{\circ} 7$ et je m'étais déjà méfié en débouchant

ma bouteille pour remplir la lampe. Peut-être l'essence minérale aurait elle mieux résisté.

Le changement de lampe m'obligea à supprimer l'écran protecteur, qu'il n'y avait plus moyen de placer et dont la fente n'était plus au bon niveau, au risque de diminuer un peu la précision de l'équilibre. Cette installation sommaire me servit dans toutes les mesures faites du côté d'Iselle, ce jour-là et le lendemain.

Je commençai donc les mesures véritables à 10 heures, et je jugeai utile de faire un tour d'horizon complet, 8 azimuts, qui doivent donner deux à deux la même déviation, pour être assuré de mes résultats. L'opération marcha à souhait, et fut terminée à 1 heure et demie, après trois heures et demie d'observations. Voici les lectures brutes :

N.-E.	E.	S.-E.	S.
—	—	—	—
1102	1453	1276	921
S.-W.	W.	N.-W.	N.
—	—	—	—
1114	1479	1300	946

d'où l'on déduit les zéros successifs :

1189, 1187, 1195, 1200, 1207, 1212.

Avec une marche aussi lente et aussi régulière, la correction proportionnelle au temps est applicable en toute sécurité; l'erreur maximum du résultat n'atteint pas 2 divisions.

L'appareil fut remis en caisse, porté par deux hommes, d'une seule traite, à 2 kilomètres de là, au kilomètre 7, où je voulais faire une mesure dans une grande chambre. Un peu avant 3 heures, l'appareil était déballé, réglé, l'origine des azimuts déterminée, et les mesures commençaient. A 5 h. 50, en moins de

trois heures, les 8 azimuts étaient déterminés. Voici les lectures brutes :

N.-E.	E.	S.-E.	S.
—	—	—	—
1239	1760	1186	632
S.-W.	W.	N.-W.	N.
—	—	—	—
1220	1772	1195	640

d'où l'on déduit les zéros successifs :

1212, 1195, 1203, 1201, 1207, 1206

encore très satisfaisants, dont la marche est en apparence un peu moins régulière à cause de la plus grande amplitude, qui rend nécessaires les corrections de tangence et d'incidence sur le quartz.

Désormais rassuré sur le bon fonctionnement de l'appareil, je résolus de ne faire en chaque station que les 5 lectures nécessaires pour avoir un contrôle de la régularité de marche du zéro.

A 6 heures et demie l'appareil était emballé et nous repartions dans la direction d'Iselle. Je décidai d'opérer le lendemain au kilomètre 4, à peu de distance des sources froides extraordinaires et de la couche de terrain meuble qui a été la plus difficile à traverser. Ces 3 kilomètres furent encore franchis sans difficulté, les porteurs se relayant de kilomètre en kilomètre; le trépied et la caisse, cadenassée, furent déposés dans la chambre 4; à 8 h. 1/2 nous étions sortis du tunnel, après treize heures et demie de séjour.

Cette première journée me parut de bon augure. L'appareil fonctionnait très bien; le travail, malgré la température élevée, 29° 7 au kilomètre 9, 28 degrés au kilomètre 7, ne m'avait pas paru fatigant. Les hommes, qui connaissaient bien le tunnel, m'avaient procuré de l'eau fraîche; et il suffisait de sortir de temps

en temps de la chambre, où l'air est immobile, pour éprouver sur la voie une sensation de fraîcheur, qui oblige à se revêtir, grâce à l'aérage puissant qui apporte d'Iselle de l'air frais et propre. Au retour surtout où l'on marche contre le vent, cette sensation est reposante.

Le lendemain lundi 19, rassuré par la cessation complète du travail dans le tunnel constatée la veille, je me décidai à faire deux observations sur la voie, en postant simplement un des hommes en amont et l'autre en aval, pour me garer. Je me plaçai à 20 mètres de la chambre 4 en m'éloignant d'Iselle et me rapprochant de la puissante source froide dont le grondement continu contraste avec le silence de tout le reste du tunnel. A 11 heures les 5 azimuts étaient finis et je recommençais au kilomètre 3 à 11 h. 40 également sur la voie. A 2 h. 1/4 je passais dans la chambre 3 pour avoir un terme de comparaison, et juger de l'exactitude des corrections locales. Un des azimuts ayant paru mauvais, j'en fis un sixième, ce qui me mena à 5 heures. A 5 h. 1/2 j'étais installé 1 kilomètre plus loin, au kilomètre 2, dans une grande chambre. A 7 h. 50 la mesure était finie et nous sortions du tunnel à 8 h. 1/2, rapportant avec nous tout le matériel.

Excellente seconde journée, pendant laquelle j'avais pu faire 4 stations très différentes.

Sans pouvoir l'affirmer à cause de la grande amplitude (± 1000 divisions) et des corrections qu'elle exige, les mesures sur la voie me parurent moins bonnes que dans les chambres, et mon regret de n'avoir pu les organiser systématiquement s'en atténua. Les conditions de travail sont sûrement moins bonnes; la vivacité du courant d'aérage oblige à conserver les lampes fermées; une bougie s'y éteint. L'appareil est donc exposé, d'un côté seulement, à un courant d'air vif beaucoup plus frais que les parois rayonnantes du tunnel; ce rafraîchissement est dissymétrique, surtout dans les azimuts ± 45 degrés; il l'est encore dans les azimuts 0 degré et 90 degrés, à cause de l'obstacle créé par l'observateur lui-même. Il faudrait pour avoir toute sécurité, sinon une tente

comme en plein air, au moins un paravent. En outre, chaque ouverture du rideau au portail d'Iselle supprime le courant d'air pendant quelques minutes et laisse prédominer le rayonnement des parois. La stabilité thermique est beaucoup moindre que dans les chambres.

Le mardi 20, je suivis avec intérêt les travaux de la Commission géodésique à la sortie du tunnel par la galerie de direction et à travers le torrent jusqu'à l'observatoire du sud, et je rentrai par le même train à la fin de la journée, rapportant mes appareils qui furent déposés hors du tunnel, dans le magasin de la Commission géodésique. Le temps s'était gâté dans la journée, et il faisait froid dans la vallée du Rhône.

Cinq hommes m'avaient paru inutiles, surtout du côté de Brigue où les trains pourraient être utilisés pour quelques transports. Il me parut suffisant d'en demander trois; mais je ne pus les voir le soir même. Je devais les trouver le lendemain matin, au départ du train qui emmenait la première équipe, à 5 heures, munis du nécessaire pour faire la double journée, soit seize heures, et rentrer seulement par le train de 9 heures du soir.

Dans la soirée j'achetai à Brigue des bougies, des allumettes, une petite lampe du genre de celles des ouvriers du tunnel, mais moins lourde, pour éclairer mon appareil, et un litre du mélange d'huile et de pétrole qu'on y brûle.

Bien m'en prit de m'être ainsi muni, car les trois hommes de corvée que je trouvais n'avaient pris ni lanterne, ni huile, ni bâtons, ni cordes, malgré mes recommandations de la veille au « capitano ». Comme je l'appris d'eux au cours de la journée, c'étaient trois terrassiers italiens faméliques, dont l'un n'avait même pas mangé depuis la veille, et ne fut bon à rien pendant toute la journée. Au point où en était l'entreprise, les travaux électriques restaient seuls à terminer; les contremaîtres et les ouvriers intelligents et robustes qui restaient avaient tous été employés pour les trois équipes de la mesure de base. J'avais fort heureusement fait connaissance avec le tunnel du côté d'Iselle, car mes trois porteurs

n'y étaient jamais entrés, et je sais trop quel travail j'aurais pu faire si j'avais ainsi débuté.

M. Gautier (de Genève), qui conduisait l'équipe du matin, consentit à me laisser une de ses lanternes; et à 6 heures du matin, le train s'arrêtait un instant à 8 kilomètres de Brigue pour m'y déposer avec mes appareils et mes aides. Après le départ du train, avec deux lanternes seulement, c'était lugubre. L'atmosphère ne ressemblait pas à celle du côté d'Iselle. Le courant d'air rapportait toute la fumée de la locomotive, autour de laquelle la vapeur se condensait, en une brume opaque et noirâtre ruisselant le long des murs. L'appareil, aussitôt sorti de sa caisse, se couvrit d'eau, le trépied ruisselait; je reconnus quelle faute j'avais commise en sortant l'appareil du tunnel la veille au soir, pour l'enfermer dans un magasin et lui faire passer la nuit à 3 degrés ou 4 degrés. Combien de temps faudrait-il pour qu'il reprit la température du tunnel, suffisamment uniforme? Il fallut plus de trois heures, pendant lesquelles le balancier marchait continuellement, pas très vite, mais tout le temps. A 8 heures le train revint en sens inverse, et M. Rosenmund me laissa une nouvelle lanterne. C'est seulement une heure après le retour du train, que l'atmosphère se nettoya un peu, et que la lampe placée de l'autre côté du tunnel, à 5 mètres de distance seulement, cessa d'être entourée d'une large auréole colorée. Enfin vers 9 heures $1/2$, le dépôt d'eau sur l'appareil et sur le trépied ayant à peu près disparu, les trois derniers azimuts donnèrent de bonnes positions d'équilibre. J'en avais fait 9; le premier, le cinquième et le dernier auraient dû être identiques, et j'obtenais 809, 1175 et 1244. Heureusement, la cause de la marche continue du zéro était évidente, et les mesures faites du côté d'Iselle me donnaient une sécurité suffisante pour m'arrêter après trois bonnes positions d'équilibre. Mais qu'eussé-je craint, si ç'avait été ma première observation dans le tunnel!

Il était 11 h. $1/2$; j'emballai et me mis en route pour le kilomètre 7. Sans bâton ni cordes, les deux hommes portaient la caisse par les poignées; mais l'atmosphère du tunnel les avait

visiblement fatigués, et l'obscurité profonde ne les encourageait pas; ils s'arrêtaient tous les 100 mètres; le troisième ne pouvait même pas porter le trépied de bois. Je finis par leur faire glisser la caisse sur un des rails, en se servant des poignées seulement pour la maintenir.

Enfin, à midi $3/4$, l'appareil était en place, dans la chambre 6, et je commençais les observations. A 1 h. 37, le train passe pour le changement d'équipe et me laisse deux lampes nouvelles et de l'huile. Je pousse activement les lectures (5 azimuts), pour profiter du retour du train, qui passe à 3 h. 5 et me transporte au kilomètre 6, où entre 4 heures et 6 h. $3/4$, je mesure de nouveau 5 azimuts, non sans quelque gêne produite par le travail, heureusement intermittent, d'ouvriers électriciens dans la niche en face de cette chambre. Puis je fais transporter la caisse, en glissant, au kilomètre 5, où je la dépose avec le trépied pour l'y retrouver le lendemain, je termine la route à pied sans attendre le train du soir, et je sors du tunnel à 8 heures. Au lever du rideau, le passage est brusque, de 20° à zéro, car il est tombé une belle couche de neige.

Le lendemain jeudi, même programme; entrée dans le tunnel par le train de 5 heures avec les mêmes hommes, mais munis des lanternes, cordes, etc., nécessaires, et arrêt au kilomètre 5. — Intéressante observation du passage du train au retour à 6 h. 49; 5 azimuts entre 5 h. $1/2$ et 8 h. 50.

Transport à pied au kilomètre 4; 5 azimuts entre 9 h. 12 et midi.

Transport à pied au kilomètre 2. La chambre 3, pleine d'eau, a semblé impraticable. 5 azimuts entre 1 heure et 4 heures.

Enfin, transport à pied au kilomètre 1; 5 azimuts entre 5 heures et 8 heures. Sortie du tunnel à 8 h. $1/2$ en laissant tout installé au kilomètre 1.

J'avais hésité d'abord à m'installer dans cette chambre, dont le sol était recouvert de 10 centimètres d'eau. Mais mes aides retrouvèrent quelque initiative, et recouvrirent assez vite toute la surface

avec les dalles de grès du caniveau, qui avaient été entassées dans un coin de la chambre. Convenablement calées avec des pierres, surtout celles du centre sur lesquelles reposait le trépied, ces dalles formaient un sol à peu près uni et à peu près stable; la distribution est assez régulière et symétrique pour que les actions parasites soient certainement faibles.

Je revins seul le lendemain vendredi 23, pour refaire ma dernière mesure et déterminer l'influence d'un petit déplacement de l'appareil, en faisant des mesures pour diverses positions excentrées de 2 ou 3 décimètres. Malheureusement, les cinq jours de chômage étaient écoulés, le travail reprenait dans le tunnel; des électriciens, des ouvriers passaient de temps en temps. Une des quatre équipes de topographes chargés d'effectuer le nivellement de précision de tout le tunnel fit une série d'essais pour fixer définitivement sa technique dans les conditions inaccoutumées offertes par le tunnel, et j'eus pendant près d'une demi-heure, aux abords de la chambre 1, le spectacle pittoresque et amusant, mais un peu gênant, des ingénieurs installés au milieu de la voie, avec un aide spécialement chargé de protéger le niveau contre les gouttes d'eau suintant de la voûte en maintenant au-dessus un grand parasol de peintre; des lanternes à acétylène portées par d'autres aides, formaient autant de points brillants, mobiles autour de la large tache lumineuse du parasol, se détachant de la masse d'ombre du tunnel, sombre et sans reflet.

Je trouvai mon trépied hors de la chambre; je le remis en place en le centrant avec le plus grand soin, et fit une bonne série de 5 azimuts. Laissant l'appareil sur son trépied auquel il est solidement maintenu par la pompe et serrant le balancier, je glissai le trépied avec précaution sur les dalles, en l'avancant de 28 centimètres vers le tunnel, et je fis une nouvelle série de 5 azimuts. Je voulus recommencer de même pour un déplacement perpendiculaire au premier; mais dans ce mouvement, une des dalles, moins bien calée, oscilla et me fit faire un faux mouvement, l'appareil reçut un choc; je m'aperçus que j'avais oublié de serrer le balancier; crai-

gnant un accident, je regardai sans pouvoir retrouver les franges, je crus avoir brisé le fil de torsion; en réalité, j'avais tout simplement oublié de remettre l'appareil de niveau. Il était 4 heures, je remis l'appareil dans sa boîte et sortis du tunnel à la recherche de porteurs pour le ramener hors du tunnel au magasin géodésique. En fait, cette petite journée de travail sans aide avait été pénible, surtout à cause de la difficulté de m'éclairer à propos pendant les mises en place et les réglages, avec mes deux lampes ou mes bougies, que je ne savais où placer et dont l'éclat était insuffisant; d'où les fausses manœuvres. A défaut d'aide approchant la lampe, il m'aurait fallu une forte lampe à pétrole ou une lampe à acétylène; mais je n'en avais pas pris par crainte de leur rayonnement thermique vers l'appareil.

Le samedi 24, la Commission géodésique effectuait la jonction du tunnel à l'observatoire du nord; opération extrêmement intéressante à cause de la traversée du Rhône par un fil de 72 mètres, mais rendue sensiblement plus difficile par l'épaisse couche de neige qui couvrait même les berges. Je passai une partie de ma journée à suivre ces travaux et à jouir du merveilleux spectacle qu'offrait toute la vallée, malgré le ciel couvert.

J'avais fait des mesures en 13 stations, 6 du côté du sud, 7 du côté du nord, en 57 heures de présence effective dans le tunnel, réparties sur 4 jours, sans compter les observations de contrôle du vendredi au kilomètre 1. Les résultats me parurent tous plus précis et plus réguliers que je n'avais espéré au départ; toutes les observations du côté nord, faites dans les chambres, pouvaient être comparées avec certitude; celles du côté sud avaient été faites dans des conditions trop différentes, il me parut désirable de faire quelques nouvelles observations dans les chambres sud.

J'avais appris d'ailleurs que le tunnel devait rester libre plusieurs nuits, de 9 heures à 6 heures du matin, pour les travaux du nivellement de précision. Je me décidai à remplacer le fil que je croyais rompu, par un de ceux que j'avais apportés en prévision de cet accident, et à faire une nouvelle série.

L'observatoire du nord étant devenu libre vers la fin de l'après-midi du samedi, je constatai de suite les avantages du fil de platine iridié, tenace; le choc l'avait laissé intact, mais le zéro avait subi un déplacement sensible, exigeant un nouveau réglage que je fis le dimanche, après avoir passé la matinée à comparer les observations déjà faites. Le lundi matin, je fis dans l'observatoire une mesure (5 azimuts), médiocre à cause des courants d'air, et je pris mes dispositions pour le travail de la nuit.

Le soir, au train de 9 heures, nouvel avatar : deux porteurs seulement au lieu de trois, l'un trop jeune, l'autre trop vieux, ne connaissant pas le tunnel, heureusement munis de nourriture, mais sans cordes, ni bâtons, ni lanternes et ne parlant que le plus pur patois suisse allemand! Enfin je me procure les accessoires qui manquent et je me fais déposer par le train au kilomètre 12 de Brigue, 8 d'Iselle, dans une petite chambre où je n'ai pas encore fait de mesures.

Malgré le passage du train qui a parcouru toute la longueur du tunnel, malgré l'entrée récente de l'appareil apporté avec nous, l'équilibre de température paraît assez rapidement obtenu, et les mesures se font assez bien. L'atmosphère paraît sèche et agréable du côté du sud; aucune condensation ne se produit sur l'appareil.

A 1 heure du matin, je réveille les deux hommes; je me charge du trépied, du bidon d'huile, des provisions, et nous partons pour le kilomètre 6. Les hommes insuffisamment robustes s'arrêtant fréquemment, le transport, long et pénible, dure 45 minutes pour 2 kilomètres. Je m'arrange de manière à finir avant le passage du train vers 6 heures du matin, et à l'utiliser pour le transport au kilomètre suivant.

De 6 heures à 9 heures du matin au kilomètre 5. Bonne série.

Enfin, je tiens à retourner au kilomètre 4, près de la puissante source froide, où j'ai fait une mesure sur la voie, et à faire une mesure dans la chambre, pour la comparer avec la mesure faite sur la voie au kilomètre 3, et dans la chambre, qui est aussi une petite chambre. Mais les deux hommes, qui ont pourtant dormi et mangé,

sont déjà fourbus; ils mettent plus d'une heure à franchir 1 kilomètre! Impossible de songer à aller ensuite avec eux jusqu'à la chambre 1 (3 kilomètres!) où d'ailleurs l'influence topographique extérieure ne doit pas être calculable, car la vallée de la Diveria est toute proche et reçoit un profond torrent qui passe en travers, à 200 mètres seulement au-dessus du tunnel.

Je mesure donc 5 azimuts seulement dans la chambre 4, et je fais avec soin le paquetage pour retourner à Brigue par le train à 3 heures après midi.

Dans la première et dans la dernière station, la marche du zéro a été un peu trop grande; descendante dans la première, pendant que l'appareil se réchauffe de 0 degré au dehors à 28 degrés dans la chambre 8; moindre et ascendante dans la chambre 4, pendant que l'appareil se refroidit à 17 degrés, à cause du voisinage de la puissante source froide. La dissymétrie de protection thermique (ch. IV, p. 54-56), qui subsiste malgré tout dans mon appareil, paraît ainsi bien marquée.

Néanmoins toutes ces observations sont suffisantes, et leur ensemble est beaucoup plus précis et important que je ne l'avais espéré en partant.

Rentré à Paris le jeudi 29 mars, je constate immédiatement que l'appareil est arrivé en bon état et je l'installe au laboratoire pour diverses mesures complémentaires.

En dehors des résultats positifs, relatifs au massif du Simplon, j'ai d'abord constaté que mon appareil permet bien de faire une station — mise en place, 5 azimuts, emballage — en 3 heures 1/2, puisque j'ai fait 19 stations dans le tunnel, en 83 heures de présence, réparties sur 6 journées dont il faut retrancher au moins 13 ou 14 heures pour les transports en chemin de fer et surtout à pied.

Les précautions principales dont les incidents du récit précédent montrent la nécessité sont les suivantes :

Être muni de cordes, bâton, lanternes, bidon d'huile, bougies, allumettes, pelle et pioche, . . . et crayons.

Prendre comme porteurs 3 ou 4 hommes robustes, habitués à la région où l'on va travailler, parlant une langue intelligible; s'entendre avec eux à l'avance et n'en pas changer.

Noter toutes les particularités de chaque station; étaler uniformément et déblayer toutes les masses parasites; mesurer toutes celles qu'on ne peut déplacer; définir au centimètre près la position et au dixième de degré près l'orientation de l'appareil *et s'assurer de la position et de l'orientation des repères choisis*; enfin, prendre soi-même sur place *toutes* les mesures accessoires dont on pourra *peut-être* avoir besoin pour la discussion, et recueillir *immédiatement*, auprès des administrateurs et ingénieurs, tous les documents de construction ou de topographie nécessaires.

CHAPITRE XI.

RÉSULTATS DES OBSERVATIONS.

LE GÉOÏDE TEL QU'IL EST DANS LE TUNNEL.

Je vais donner dans ce chapitre les résultats directs obtenus dans chaque station, ainsi que les erreurs de position, d'azimut origine et d'actions parasites (tas de pierres, inégalités du ballast, etc.).

Les lectures de la vis micrométrique sont ramenées à une même unité de rotation du balancier, par le procédé de correction expérimental direct (ch. VII, p. 106). Pour cela, j'ai fait au retour trois séries d'observations des franges de la raie verte du mercure, le balancier étant immobilisé, et le quartz serré successivement dans les différentes positions qu'il a occupées pour les mesures: — à $+11$ degrés, pendant les cinq premières journées dans le tunnel; à $+0$ degré pour les deux premières observations de la dernière nuit; enfin à $+7$ degrés pour les deux dernières observations de cette même nuit; et ces observations de franges ont été utilisées directement pour les corrections comme il a été expliqué au chapitre VII.

Ce sont les nombres de divisions ainsi ramenés à 115 divisions pour une frange de la raie verte du mercure, qui sont transcrits ici.

Cette valeur de 115 divisions correspond à l'incidence $+11^\circ$ sur le quartz. Sous l'incidence normale, le même retard donnerait 120,1 divisions; pour ramener à l'incidence normale sur le quartz, il faudra donc multiplier tous les nombres du tableau résumé par $\frac{120,1}{115}$ ou 1,044, conformément au tableau IV, chap. VII.

L'azimut origine est l'azimut à peu près perpendiculaire au tunnel, pour lequel la lunette d'orientation visait le milieu de la niche opposée. Il est passif de trois erreurs, dont deux sont constantes :

1° Erreur de direction de la lunette d'orientation (non per-

pendiculaire au tube optique), correction mesurée au laboratoire, $-1^{\circ}5$;

2° Erreur de parallaxe; correction facile à calculer :

Petites chambres : $+1^{\circ}1$;

Grandes chambres : $+0^{\circ}9$;

Voie, et observatoire : $0^{\circ}0$;

3° Erreur due à la position inexacte du trépied. Nous avons vu au chapitre IX que la tentative faite pour préciser cette position par une sorte de triangulation ne donne aucune précision.

En outre, dans chaque azimut apparent, l'azimut vrai est celui du balancier, qu'on obtient en comparant la position libre à sa position immobilisée. Cette cause d'erreur est très petite, car il faut 400 divisions pour $0^{\circ}1$; néanmoins, après les deux premières journées, j'ai constamment noté, au début et à la fin de chaque station, la position du balancier immobilisé. Cette habitude a un avantage capital; elle empêche d'oublier l'arrêt du balancier avant tout déplacement de l'appareil. En outre, bien que cette lecture ne comporte pas grande précision, dépendant du degré de serrage des V, elle permet de s'assurer qu'il n'y a pas eu de déplacement sensible des cristaux dans leurs montures, ou de toute la colonne d'attache du fil de torsion dans ses feutres.

Enfin, il m'a paru utile d'inscrire l'azimut origine α_0 qu'aurait défini la moyenne des visées sur les deux arêtes de la niche en face de la chambre. Peut-être est-il plus exact que celui déduit de la seule visée du milieu de cette niche.

Les actions parasites sont faciles à apprécier, en décomposant les masses en un petit nombre de fragments. Une masse m dont les coordonnées parallèle et perpendiculaire au tunnel, à partir de l'axe de l'appareil, sont x et y , produit sur l'appareil une torsion mesurée par

$$60 \times \frac{3m}{r^3} \left[\frac{x^2 - y^2}{r^2} \sin 2(\alpha - \alpha_0) + 2 \frac{xy}{r^2} \cos 2(\alpha - \alpha_0) \right]$$

divisions, sensiblement, dans l'azimut α . C'est sous cette forme qu'elles seront inscrites pour chaque station. Il faudra les retrancher dans chaque azimut (0, 45°, ...) pour obtenir l'effet vrai du tunnel, et de ses chambres, tel qu'il est supposé construit, avec une parfaite régularité. Au nombre de ces actions parasites est comprise l'insuffisance de ballast des chambres. Une fois la correction faite, la chambre est donc supposée ballastée au niveau de la voie. *Mais l'appareil est laissé à son niveau réel*; la correction correspondante au relèvement de tout l'appareil dépend de la construction de la maçonnerie et ne sera faite que dans le chapitre suivant au moment du calcul détaillé des actions *locales* dues au tunnel lui-même.

Chaque tableau contient plusieurs colonnes :

- 1° L'azimut α ;
- 2° L'heure à laquelle l'équilibre est atteint depuis 3 minutes, et persiste 3 minutes de plus;
- 3° La position d'équilibre n'' en divisions de la vis micrométrique, corrigée de l'erreur de tangence et de l'erreur d'incidence sur le quartz, ainsi ramenée à la valeur uniforme de 115 divisions pour une frange de la raie verte du mercure;
- 4° Les zéros Z déduits des observations de deux en deux;
- 5° Les positions n''' corrigées de la marche du zéro, et ramenées à l'époque du 5^e azimut;
- 6° Enfin les écarts N , en divisions de la vis, de la position de torsion nulle, qui résultent de la colonne précédente. En grandeur et en signe, ces écarts sont liés à l'azimut par la relation

$$N = A \cos 2(\alpha - \alpha_0) + B \sin 2(\alpha - \alpha_0);$$

A est la valeur de N dans le premier azimut, et B la valeur de N dans l'azimut suivant.

Magnétisme. — Le balancier étant un peu aimanté, il faudrait en outre faire la petite correction de magnétisme.

D'après les résultats du chapitre VIII l'action d'un champ magnétique d'intensité horizontale H (C.G.S.) et de direction α_m produit une déviation mesurée par $-5,5 \frac{H}{0,2} \cos(\alpha - \alpha_m)$ divisions sur l'appareil.

Si l'on pouvait admettre que le champ magnétique dans le tunnel est le même qu'au dehors, en grandeur et direction, son action serait dans les différents azimuts, pour les chambres:

1 ^{er} azimut.....	— 4,8 divisions.
2 ^e	— 5,2
3 ^e	— 2,7
4 ^e	+ 1,5
5 ^e	+ 4,8

et il faudrait la *retrancher* des lectures corrigées. Mais cet effet diffère à peine de celui d'une marche uniforme de $-2,5$ divisions d'un azimut au suivant; et à ± 1 division près, il se perd dans la marche du zéro. Pour que cette correction soit utilement faite à part, il faudrait connaître H et α_m dans le tunnel.

DÉTAIL DES OBSERVATIONS.

KILOMÈTRE 1. — PETITE CHAMBRE.

22 mars.		$t =$ non notée.		$(Q_2, +11^\circ)$	
$\alpha.$	HEURE.	$n''.$	$Z.$	$n'''.$	N.
—	—	—	—	—	—
269°3	VI 26	1531		1493	+ 42
314°3	VI 49	1963	1478	1935	+ 484
359°3	VII 10	1425	1471	1406	— 45
44°3	VII 33	979	1464	970	— 481
89°3	VII 53	1493		1493	+ 42

Balancier serré avant : 562.

Marche très régulière du zéro; $-4,4$ en 10 minutes.

Zéro final : 1451.

Azimut origine : $\alpha_0 = 269^\circ 3$.

Azimut moyen : $\alpha'_0 = 271^\circ 2$.

A corriger de : $-1^\circ 5 + 1^\circ 1 = -0^\circ 4$.

Actions parasites : inconnues; probablement négligeables.

Dalles de niveau : assez bien calées.

Appareil au centre.

KILOMÈTRE 1. — PETITE CHAMBRE.

23 mars.

$t = 21^\circ 2$

($Q_2, +11^\circ$)

(2^e position.)

$\alpha.$	HEURE.	$n''.$	$Z.$	$n''.$	$N.$
272° 2	X 27	1482		1479	+ 81
317° 2	XI 15	1869	1400	1867	+ 469
2° 2	XI 48	1319	1398	1318	— 80
47° 2	XI 15	929	1398	929	— 470
92° 2	XII 42	1479		1479	+ 81

Balancier serré avant : 556.

Balancier serré après : 539.

Après le départ de l'équipe de nivellement, de X^h 45 à XI^h 25, dans le 2^e azimut, une grande oscillation de ± 15 divisions, met longtemps à s'éteindre. Elle est certainement due à l'ouverture du rideau pour la sortie de cette équipe, et au courant d'air qui en résulte, et que l'agitation de la flamme de la bougie dans la chambre montre clairement.

Azimut origine : $\alpha_0 = 272^\circ 2$.

Azimut moyen : $\alpha'_0 = 271^\circ 7$.

Azimut du fond : $\alpha''_0 = 269^\circ 7$.

A corriger de : $-1^\circ 5 + 1^\circ 1 = -0^\circ 4$.

Actions parasites : inconnues.

C'est la deuxième observation dans la même chambre (ch. X, p. 142), l'appareil étant soigneusement installé au centre.

Les azimuts à comparer avec ceux de la veille sont :

$$\alpha_0'' = 269^\circ 7 \text{ milieu du fond de la niche,}$$

$$\alpha_0' = 271^\circ 7 \text{ moyen,}$$

au lieu de $269^\circ 3$ et $271^\circ 2$. Du soin apporté au centrage résulte que la différence

$$\alpha_0' - \alpha_0'' = 2^\circ 0$$

est la même que la veille,

$$\alpha_0' - \alpha_0 = 1^\circ 9.$$

Les valeurs absolues sont presque les mêmes parce que les dalles forçaient à remettre le trépied de la même façon et que, par hasard, l'appareil a été remis de même, sur le trépied, au lieu d'être tourné de ± 120 degrés par échange des vis calantes.

L'azimut origine actuel a été pris, pendant la présence de l'équipe de nivellement, sur un autre repère, au milieu de l'ouverture de la niche. La différence $\alpha_0 - \alpha_0' = 2^\circ 5$ représente l'angle de l'azimut origine actuel par rapport à celui de la veille.

C'est cette différence d'azimut qui produit la différence en apparence considérable des déviations transverses. On verra à la fin du chapitre que la concordance est satisfaisante.

KILOMÈTRE 1. — PETITE CHAMBRE.

23 mars.

$$t = 21^\circ 4$$

$$(Q_2, +11^\circ)$$

(3^e position.)

α	H URE.	n'' .	Z.	n''' .	N.
268° 7	I 45	1485		1443	+ 50
313° 7	II 15	1897	1428	1865	+ 472
358° 7	III 00	1370	1409	1353	— 40
43° 7	III 25	921	1406	912	— 481
88° 7	III 54	1443		1443	+ 50

Corrigeons de la marche du zéro d'après les extrêmes, — 3,2 en 10 minutes, et prenons 1393 comme zéro.

A II^h 17 commence une perturbation de + 27 divisions qui s'atténue et ramène à la même position d'équilibre au bout d'un quart d'heure; probablement l'ouverture du rideau à l'autre extrémité du tunnel, à Iselle, pour le train, qui est passé à I^h 24, et qui revient à III^h 56.

Azimut origine : $\alpha_0 = 268^\circ 7$ (au milieu de la niche).

A corriger de : $-1^\circ 5 + 1^\circ 1 = -0^\circ 4$.

Actions parasites inconnues.

Le trépied a été avancé de 28 centimètres vers le tunnel.

A III^h 54 on commence à entendre le train.

De III^h 56^m 5^s à III^h 56^m 10^s le train passe devant la chambre 1, en sifflant pour le rideau, qu'on ouvre entre 57^m et 58^m. Pas de trépidations. Voici la suite des lectures *brutes* de minute en minute :

(2° AZIMUT, À 45° DU TUNNEL).

III	52	53	54	55	56	57	58	59	IV
14 tours	37	38	39	39	39	35	32	34	38
IV	1	2	3	4	5	6	7	8	9
14 tours	38	34	38	43	46	41	40	40	40

Il y a eu superposition des deux effets : l'un newtonien, dû à la masse du train, l'autre perturbateur dû à l'ouverture du rideau.

Nous en reparlerons au chapitre XII.

KILOMÈTRE 2. — PETITE CHAMBRE.

22 mars. $t = 23^\circ; 24^\circ 2; 23^\circ 2$ ($Q_2, +11^\circ$)

α	HEURE.	n'' .	Z.	n''' .	N.
27°5	II 12	1531		1498	— 1
72°5	II 35	1968	1526	1943	+ 444
117°5	III 2	1522	1512	1506	+ 7
162°5	III 27	1057	1510	1050	— 449
307°5	III 47	1498		1498	— 1

Balancier arrêté avant : 572.

Balancier arrêté après : 558.

Le train passe vers Brigue au début du 2^e azimut ($11^h 24^m 25^s$) sans troubler la marche assez rapide de la frange. Il y a eu une hausse de température après le passage du train. Corrigeons de la marche du zéro d'après les azimuts extrêmes, $-3,5$ en 10 minutes, et prenons pour zéro 1499.

Azimut origine : $\alpha_0 = 27^\circ 5$.

Azimut moyen : $\alpha'_0 = 27^\circ 7$.

A corriger de : $-1^\circ 5 + 1^\circ 1 = -0^\circ 4$.

Actions parasites : 0.

Ballast au niveau de la voie.

KILOMÈTRE 4. — PETITE CHAMBRE.

22 mars.

$t = 26^\circ$

($Q_2, +11^\circ$)

$\alpha.$	HEURE.	$n''.$	Z.	$n'''.$	N.
—	—	—	—	—	—
$42^\circ 3$	X 12	1428		1414	— 3
$87^\circ 3$	X 35	1668	1427	1657	+ 240
$132^\circ 3$	XI 05	1427	1424	1420	+ 3
$177^\circ 3$	XI 32	1181	1420	1178	— 239
$222^\circ 3$	XI 54	1414		1414	— 3

Balancier serré avant : 573.

Balancier serré après : 593.

Marche régulière du zéro ; $-1,4$ en 10 minutes.

Zéro final : 1417.

Azimut origine : $\alpha_0 = 42^\circ 3$.

Azimut moyen : $\alpha'_0 = 42^\circ 5$.

A corriger de : $-1^\circ 5 + 1^\circ 1 = -0^\circ 4$.

Actions parasites : $-\sin 2(\alpha - \alpha_0) + 6 \cos 2(\alpha - \alpha_0)$.

Ballast au niveau de la voie.

KILOMÈTRE 5. — PETITE CHAMBRE.

22 mars.		$t = 27^\circ$		$(Q_2, +11^\circ)$	
$\alpha.$	HEURE.	$n''.$	Z.	$n'''.$	N.
—	—	—	—	—	—
327°8	VI 37	1452		1430	— 147
12°8	VII 5	1855	1590	1840	+ 263
57°8	VII 37	1727	1590	1719	+ 142
102°8	VII 55	1324	1578	1320	— 257
147°8	VIII 15	1430		1430	— 147

Balancier serré avant : 589.

Balancier serré après : 565.

Le train est revenu vers Brigue au début du 2^e azimut (VI^h 43), à un moment où la frange marchait vite. Un quart d'heure après (VI^h 58-VII^h 2) il y a eu une demi-oscillation négative (— 15 divisions) due probablement à l'ouverture du rideau pour la sortie du train à Brigue. Corrigeons de la marche du zéro d'après les lectures extrêmes, — 2,2 en 10 minutes, et prenons pour zéro 1577.

Azimut origine : $\alpha_0 = 327^\circ 8$.

Azimut moyen : $\alpha'_0 = 327^\circ 9$.

A corriger de : $-1^\circ 5 + 1^\circ 1 = -0^\circ 4$.

Actions parasites : $-3 \sin 2(\alpha - \alpha_0)$.

Sol nu; fort talus de ballast.

KILOMÈTRE 6. — PETITE CHAMBRE.

21 mars.		$t = 28^\circ$		$(Q_2, +11^\circ)$	
$\alpha.$	HEURE.	$n''.$	Z.	$n'''.$	N.
—	—	—	—	—	—
18°0	IV 45	1238		1246	— 241
63°0	V 15	1700	1478	1706	+ 219
108°0	V 40	1717	1487	1721	+ 234
153°0	VI 5	1274	1482	1276	— 211
198°0	VI 28	1246		1246	— 241

Balancier serré avant : 621.

Balancier serré après : 600.

Corrigeons la marche du zéro, d'après les observations extrêmes :
+ 8 en 105 minutes, et prenons pour zéro 1487.

La marche irrégulière du zéro se produit après un transport de
1 kilomètre en chemin de fer.

Azimut origine : $\alpha_0 = 18^\circ 0$.

Azimut moyen : $\alpha'_0 = 18^\circ 1$.

A corriger de : $-1^\circ 5 + 1^\circ 1 = -0^\circ 4$.

Actions parasites : $-\sin 2(\alpha - \alpha_0) + 4 \cos 2(\alpha - \alpha_0)$.

KILOMÈTRE 7. — PETITE CHAMBRE.

21 mars.		$t = 28^\circ 3; 28^\circ 8$		$(Q_2, +11^\circ)$	
α .	HEURE.	n'' .	Z.	n''' .	N.
—	—	—	—	—	—
205°5	I 02	1285		1258	— 115
250°5	I 32	1595	1393	1575	+ 202
295°5	II 07	1502	1384	1490	+ 117
340°5	II 30	1174	1380	1168	— 205
25°5	II 55	1258		1258	— 115

Balancier serré avant : 661.

Balancier serré après : 632.

La baisse du zéro est assez lente et régulière pour être corrigée;
— 2,4 en 10 minutes; réduisons au dernier azimut, et prenons
pour zéro 1373.

Le sol est en ballast incliné.

Azimut origine : $\alpha_0 = 205,5$.

Azimut moyen : $\alpha'_0 = 205,9$.

A corriger de : $-1^\circ 5 + 1^\circ 1 = -0^\circ 4$.

Actions parasites : $-3 \sin 2(\alpha - \alpha_0) + 3 \cos 2(\alpha - \alpha_0)$.

Le train venant de Brigue est passé vers la fin du 2^e azimut. Je
n'ai pas observé son action, l'ayant fait arrêter pour y prendre des
lampes supplémentaires.

KILOMÈTRE 8. — GRANDE CHAMBRE.

21 mars. $t = 28^{\circ}2; 27^{\circ}8; 28^{\circ}6$ ($Q_2, +11^{\circ}$)

$\alpha.$	HEURE.	$n''.$	$Z.$	$n'''.$	N.
—	—	—	—	—	—
28°7	VII 5	819			
73°7	VII 25	1075			
118°7	VIII 3	1165 (✓)			
163°7	IX 13	830 (✓)			
208°7	IX 35	1165 (✓)			
253°7	X 5	1690 (✓)			
298°7	X 33	1407			+ 81
343°7	X 55	915	1326		— 411
28°7	XI 20	1245			— 81

Balancier serré après : 659.

La galerie de direction S est restée ouverte de VI^h à X^h pour les travaux de la Commission géodésique. Le train est passé en revenant à VII^h 38, et la mise en marche à la fin du 2^e azimuth paraît bien avoir coïncidé avec l'approche du train. La véritable cause de l'énorme déplacement du zéro, +426, accusé par les deux mesures extrêmes dans le même azimuth, est la condensation abondante d'eau déjà signalée (chap. X, p. 140) sur l'appareil qui vient d'entrer froid et se réchauffe lentement (à comparer avec le réchauffement artificiel au laboratoire, chap. III, p. 55).

Le signe (✓) indique une marche positive de la frange.

MARCHE DE LA FRANGE PAR MINUTE. — RÉGULIÈRE.

$\alpha.$	HEURE.	MARCHE.	
—	—	—	
73°7	VII 37-34	+ 5,0	
118°7	VIII 5-22	+ 4,0	puis j'agite l'appareil.
	VIII 40-50	+ 2,0	
163°7	IX 7-20	+ 1,7	
208°7	IX 35-48	+ 1,0	
253°7	X 5-15	+ 1,0	

Azimut origine : $\alpha_0 = 28^\circ 7$.

Azimut moyen : $\alpha'_0 = 28^\circ 9$.

A corriger de : $-1^\circ 5 + 0^\circ 9 = -0^\circ 6$.

Actions parasites : 0.

KILOMÈTRE 11. — PETITE CHAMBRE.

18 mars.

$t = 29^\circ 6$ à $28^\circ 6$

($Q_2, +11^\circ$)

α .	HEURE.	n'' .	Z.	n''' .	N.
—	—	—	—	—	—
79°8	X 20	1102		1127	(— 75)
124°8	X 48	1456	1188	1474	+ 272
169°8	XI 10	1277	1188	1290	+ 88
214°8	XI 35	921	1195	928	— 274
259°8	XII 2	1114	1202	1114	— 88
304°8	XII 37	1483	1207	1475	+ 273
349°8	XII 57	1302	1215	1289	+ 87
34°8	I 22	946		926	— 276

En laissant de côté la première valeur, la marche du zéro est régulière : 27 divisions en 1 h. 50, 2 div. 5 en 10 minutes. On s'en sert pour ramener toutes les lectures à l'époque du 5^e azimut et en déduire les déviations.

Azimut origine : $\alpha_0 = 79^\circ 8$.

Azimut moyen : $\alpha'_0 = 79^\circ 6$.

A corriger de : $-1^\circ 5 + 1^\circ 1 = -0^\circ 4$.

Actions parasites : $+4 \sin 2(\alpha - \alpha_0) + (19 \pm 6) \cos 2(\alpha - \alpha_0)$.

Le dernier terme $\pm 6 \cos 2(\alpha - \alpha_0)$ correspond aux déplacements des ouvriers et est peut-être l'origine de l'écart du 1^{er} azimut et des 3^e, 5^e, etc.

Vu la marche du zéro, on laisse de côté le 1^{er} azimut.

KILOMÈTRE 12. — PETITE CHAMBRE.

26-27 mars.		$t = 25^{\circ}9; 26^{\circ}6$		$(Q_2, 0^{\circ})$	
$\alpha.$	HEURE.	$n''.$	Z.	$n'''.$	N.
87°3	XI 16	1855			
132°3	XI 43	1990	1843	1990	+ 200
177°3	XII 10	1832	1799	1832	+ 42
222°3	XII 35	1609	(\) 1790		
267°3	I 00	1748		1748	— 42

Balancier serré avant : 2267.

Balancier serré après : 2294.

L'appareil vient d'être rapporté du dehors dans le tunnel, je laisse de côté le 1^{er} azimuth, et le 4^e qui manifeste une marche décroissante assez rapide.

Azimuth origine : $\alpha_0 = 87^{\circ}3$.

A corriger de : $-1^{\circ}5 + 1^{\circ}1 = -0^{\circ}4$.

Actions parasites : $+\sin 2(\alpha - \alpha_0)$.

Un courant d'air sinistrorsum circule dans la chambre et incline la flamme de la bougie.

Le train revient et passe de XI^h 2^m 24^s à 30^s. Voici la succession des lectures *brutes* de minute en minute :

1^{er} AZIMUT. PERPENDICULAIRE AU TUNNEL.

XI	0	1	2	4	5	6	7	8	9
18 tours	67	67	67	63	62	62	60	58	58
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
60	59	59	58	54	54	54	54	53	52

Je ne sais pas à quoi est dû le saut de -4 divisions à la 14^e minute; peut-être à un arrêt du train, ou à sa sortie à Brigue.

KILOMÈTRE 13. — GRANDE CHAMBRE.

18 mars.		$t = 27^{\circ}8$ à $28^{\circ}3$		$(Q_2, +11^{\circ})$	
$\alpha.$	HEURE.	$n''.$	Z.	$n'''.$	N.
67°9	III 16	1239		1249	(+42)
112°9	III 34	1769	1212	1778	+571
157°9	III 54	1186	1201	1192	— 15
202°9	IV 14	635	1203	638	— 569
247°9	IV 36	1220	1207	1220	+ 13
292°9	V 3	1782	1208	1779	+572
337°9	V 24	1195	1212	1189	— 18
22°9	V 47	643		636	— 571

En laissant de côté la première valeur, la marche du zéro est régulière; 11 divisions en 1 h. 30, soit 1,2 en 10 minutes. On ramène toutes les lectures à l'époque du 5° azimut et on en déduit les déviations.

Azimut origine : $\alpha_0 = 67^{\circ}9$.

Azimut moyen : $\alpha'_0 = 68^{\circ}4$.

A corriger de : $-1^{\circ}5 + 0^{\circ}9 = -0^{\circ}6$.

Actions parasites : $-16 \sin 2(\alpha - \alpha_0)$.

Vu la marche du zéro, on laisse de côté le 1^{er} azimut.

KILOMÈTRE 14. — PETITE CHAMBRE.

26-27 mars.		$t = ?$		$(Q_2, 0^{\circ})$	
$\alpha.$	HEURE.	$n''.$	Z.	$n'''.$	N.
88°5	III 20	2040		2032	— 3
133°5	IV 2	2322	2040	2316	+281
178°5	IV 26	2039	2034	2037	+ 2
223°5	IV 51	1746	2035	1744	— 291
268°5	V 15	2032		2032	— 3

Balancier serré avant : 2312.

Balancier serré après : 2287.

Azimut origine : $\alpha_0 = 88^{\circ}5$.

A corriger de : $-1^{\circ}5 + 1^{\circ}1 = -0^{\circ}4$.

Actions parasites : 0.

A V^h 19, dernier azimut, une bonne position d'équilibre a été suivie d'une perturbation de $+20$ due certainement à l'ouverture du rideau de Brigue pour l'entrée du train du matin.

KILOMÈTRE 15. — PETITE CHAMBRE.

26-27 mars.		$t = 21^{\circ}4$		$(Q_2, 6^{\circ}8)$	
$\alpha.$	HEURE.	$n''.$	Z.	$n'''.$	N.
—	—	—	—	—	—
$81^{\circ}7$	VII 00	494			
$126^{\circ}7$	VII 30	906	525	897	+ 371
$171^{\circ}7$	VIII 00	557	532	551	+ 25
$216^{\circ}7$	VIII 24	160	529	157	— 369
$261^{\circ}7$	VIII 50	502		502	— 24

Balancier serré avant : 1222.

Balancier serré après : 1179.

J'exclus la première mesure à cause de sa baisse lente mais continue, et je corrige de la marche du zéro d'après les quatre autres. Zéro à 526.

Azimut origine : $\alpha_0 = 81^{\circ}7$.

A corriger de : $-1^{\circ}5 + 1^{\circ}1 = -0^{\circ}4$.

Actions parasites : 0.

Pendant tout le premier azimut, le train s'arrête (A), repart (M), s'arrête de nouveau, etc., à quelques centaines de mètres, vers Brigue. Voici les lectures brutes :

VI 54	55	A	56	57	58	M	59	A	VII.	1	2	3
4 tours 89	85		82	81	79		78		77	75	73	73

KILOMÈTRE 16. — PETITE CHAMBRE.

26-27 mars.		$t = 17^{\circ}4$		$(Q_2, +6^{\circ}8)$	
$\alpha.$	HEURE.	$n''.$	Z.	$n'''.$	N.
—	—	—	—	—	—
$81^{\circ}5$	X 48	519			
$126^{\circ}5$	XI 14	870	438	891	+ 472
$171^{\circ}5$	XI 34	357	405	371	— 48
$216^{\circ}5$	XI 56	— 60	412	— 53	— 472
$261^{\circ}5$	XII 24	467		467	+ 48

Balancier serré avant : 1206 ;

Balancier serré après : 1165.

Le refroidissement initial de 4° conduit à exclure le premier azimut, et à corriger du zéro d'après les 4 autres, en prenant pour zéro 419.

Azimut origine : $\alpha_0 = 81^{\circ}5$;

A corriger de : $-1^{\circ}5 + 1^{\circ}1 = -0^{\circ}4$;

Actions parasites : 0.

KILOMÈTRE 16 (MOINS 20 MÈTRES). — VOIE.

19 mars. $t = 24^{\circ}5$ à 20° (Q_2 , $+11^{\circ}$).

α .	HEURE.	n'' .	Z.	n''' .	N.
—	—	—	—	—	—
$24^{\circ}5$	IX 0	1014			— 98
$79^{\circ}5$	IX 20	2034	1117		+ 922
$114^{\circ}5$	IX 50	1218	1112		+ 116
$169^{\circ}5$	X 13	190	1119		— 922
$204^{\circ}5$	X 45	1020(N)			— 92

Les quatre premiers azimuts donnent de bonnes positions d'équilibre. Pendant le premier azimut, la température de l'appareil baisse de 4 degrés. Pendant le dernier, la baisse est continue et régulière, à raison de 11 divisions en 7 minutes, soit 16 divisions en 10 minutes. — La déviation a passé par un minimum 1008, qui représentait peut-être mieux la position d'équilibre — et qui aurait donné pour zéro 1113. Dans cette position, l'appareil recevait en plein le courant d'air d'Iselle par la droite. Peut-être le rideau a-t-il été ouvert. Peut-être est-ce l'effet retardé de la baisse rapide de température au début :

Azimut origine : $\alpha_0 = 114^{\circ}5$;

A corriger de : $-1^{\circ}5$;

Actions parasites : 0.

On a adopté le zéro moyen 1112, et laissé de côté le premier et le dernier azimut.

KILOMÈTRE 17 (MOINS 20 MÈTRES). — VOIE.

19 mars. $t = 20^\circ \text{ à } 20^\circ 4$ ($Q_2, + 11^\circ$).

α .	HEURE.	n'' .	Z.	n'' .	N.
150° 7	XII 4	960			— 126
195° 7	XII 42	(2079)	1085		(+ 993)
240° 7	I 7	1210	(1098)		+ 124
285° 7	I 27	118	1086		— 968
330° 7	I 56	962			— 124

Les pointés ne paraissent pas comporter d'incertitude supérieure à 5 divisions; toutefois la frange 2079 du deuxième azimuth, qui correspond à une incidence de plus de 16 degrés sur le quartz, est très loin d'être achromatique, et constitue un médiocre repère — j'adopte donc pour zéro 1086.

La déviation transverse est bien déterminée, mais la déviation principale comporte une incertitude de ± 13 divisions, en adoptant la moyenne 981.

Azimuth origine: $\alpha_0 = 240,7$.

A corriger de: $- 1^\circ 5$.

Actions parasites: 0.

KILOMÈTRE 17. — PETITE CHAMBRE.

19 mars. $t = 21^\circ 6, 22^\circ 6, 20^\circ, 21^\circ 8$ ($Q_2, + 11^\circ$).

α .	HEURE.	n'' .	Z.	n'' .	N.
215° 5	II 42	1196			+ 86
260° 5	III 2	1408	1108		+ 298
305° 5	III 30	1020	1103		(— 90)
350° 5	III 55	798	1113		+ 312
35° 5	IV 24	1206	1114		+ 96
80° 5	IV 46	1430			+ 320

Au troisième azimut, il y a eu des trépidations légères de l'image, ne gênant nullement les lectures; mais la frange, qui paraissait devoir se fixer vers 1018, a subi, à partir de III^h 32 des mouvements assez irréguliers, en même temps que la température montait dans la chambre de 21°6 à 22°6 pour baisser et recommencer à monter ensuite. Je ne puis attribuer ces mouvements qu'à un changement de l'aération provoqué par l'ouverture du rideau, soit à Brigue pour l'entrée et la sortie du train de la Commission géodésique, soit à Iselle; peut-être aux coups de mine du génie italien propagés par la roche. Laissant de côté cette observation, j'adopte comme zéro 1110.

Azimut origine : $\alpha_0 = 215,5$.

Azimut moyen : $\alpha'_0 = 216,1$.

A corriger de : $-1^\circ 5 + 1^\circ 1 = -0^\circ 4$.

Actions parasites : $-3 \sin 2(\alpha - \alpha_0)$.

Le ballast est en talus, assez incommode; surtout dans les 1^{er} et 5^e azimuts.

KILOMÈTRE 18. — GRANDE CHAMBRE.

19 mars.

$l = 20^\circ 2$

$(Q_2, +11^\circ)$.

α .	HEURE.	n'' .	Z.	n''' .	N.
—	—	—	—	—	—
24°5	V 56	1164		1148	+ 42
69°5	VI 23	1738	1118	1727	+ 621
114°5	VI 46	1072	1124	1064	— 42
159°5	VII 10	510	1110	506	— 600
204°5	VII 34	1148		1148	+ 42

Au début du 2^e azimut (VI^h) et à la fin du 3^e (VI^h 50) il y a eu de petites trépidations. En outre, dans ce dernier azimut, l'image immobile a recommencé à se mouvoir nettement au moment des trépidations — mêmes questions qu'au kilomètre 17. — La température est restée constante. Le sol ballasté est plat.

Marche admise, d'après les azimuts extrêmes — 16 en 98 minutes, soit — 1,6 en 10 minutes.

Azimut origine : $\alpha_0 = 24,5$.

Azimut moyen : $\alpha'_0 = 24,3$.

A corriger de : $-1^\circ 5 + 0^\circ 9 = -0^\circ 6$.

Actions parasites : $-16 \sin 2(\alpha - \alpha_0)$.

OBSERVATOIRE DU NORD.

Première observation à Brigue; uniquement destinée au réglage de l'appareil.

17 mars.		$t = 7^\circ$		$(Q_2, +5^\circ)$.	
α .	HEURE.	n'' .	Z.	n''' .	N.
54°	IX 21	(\)		
99°	IX 40	2045			+ 212
144°	IX 56	2423			+ 590
189°	1833	
234°	X 40	1244			- 589

Azimut origine : $\alpha_0 = 144$.

A corriger de : $-1^\circ 5$.

DEUXIÈME OBSERVATION.

26 mars (neige).		$t = 4^\circ 2$		$(Q_2, 0^\circ)$.	
α .	HEURE.	n'' .	Z.	n''' .	N.
163° 7	X 16	2041			+ 606
208° 7		(/)	1435	
253° 7	XI 15	829			- 606
298° 7	XI 45	1663			+ 228
343° 7		(/)			

Azimut origine : $\alpha_0 = 343^\circ 7$.

A corriger de : $-1^\circ 5$.

Le vent qui passe à travers les volets mal clos produit une marche rapide dans certains azimuts. L'ordre de grandeur est néanmoins assez bien défini.

RÉSUMÉ.

Il faut maintenant rapporter tous ces résultats uniformément à l'axe du tunnel vers Brigue. Soit α_i l'azimut de l'axe du tunnel, ce que nous appelons l'azimut corrigé, la formule devient

$$N = A \cos 2 (\alpha - \alpha_i + \alpha_i - \alpha_0) + B \sin 2 (\alpha - \alpha_i + \alpha_i - \alpha_0)$$

ou

$$N = [A \cos 2 (\alpha_i - \alpha_0) + B \sin 2 (\alpha_i - \alpha_0)] \cos 2 (\alpha - \alpha_i) \\ + [B \cos 2 (\alpha_i - \alpha_0) - A \sin 2 (\alpha_i - \alpha_0)] \sin 2 (\alpha - \alpha_i)$$

et ce sont les coefficients de cette nouvelle formule, qui sont intéressants; il faut les diminuer en outre de ceux de la formule des actions parasites. Nous les désignerons alors par \mathcal{A} et \mathcal{B} ; \mathcal{A} en particulier est le coefficient qui serait toujours nul en raison de la symétrie du tunnel seul, s'il n'y avait pas d'actions extérieures, intermédiaires et lointaines⁽¹⁾.

J'ai adopté l'azimut moyen α_0 comme définissant le mieux la direction toutes les fois que je l'avais noté.

J'ai noté entre parenthèses le degré d'incertitude lorsqu'il dépasse ± 2 divisions.

Un point d'interrogation indique que l'incertitude est inconnue.

⁽¹⁾ Dans la note publiée aux *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences* (9 avril 1906) aussitôt après mon retour, le tableau a été formé au moyen des lectures brutes; les corrections de tangence et d'incidence sur Q_i , la réduction

à l'axe du tunnel, et enfin les corrections d'actions parasites ont eu un peu plus d'importance que je ne l'avais supposé; d'où la différence entre les deux tableaux.

TABLEAU DES RÉSULTATS. ($Q_2: + 11^\circ$).

KILOMÈTRE.	A.	B.	$2(\alpha_i - \alpha_0)$	\mathcal{A} .	\mathcal{B} .
Observ. N.	+ 600 (± 10)	- 220 (± 8)	- 3° 0	+ 611 (± 10)	- 189 (± 8)
1	+ 43	+ 482	+ 3° 0	+ 68	+ 480
1'	+ 81	+ 470	- 1° 8	+ 66	+ 473
1''	+ 45 (± 5)	+ 476 (± 5)	+ 3° 2	+ 71 (± 5)	+ 474 (± 5)
2	- 3	+ 447	- 0° 4	- 6	+ 447
4	- 3	+ 240	- 0° 4	- 11	+ 241
5	- 145	+ 260	- 0° 6	- 148	+ 261
6	- 238 (± 4)	+ 215 (± 4)	- 0° 6	- 244 (± 4)	+ 214 (± 4)
7	- 116	+ 203	- 0° 8	- 122	+ 204
8 G	- 81 ?	+ 411	- 0° 8	- 87 ?	+ 410
11	- 88	+ 274	- 1° 2	- 113	+ 268
12	- 42 ?	+ 200	- 0° 8	- 45 ?	+ 200
13 G	+ 15	+ 570	- 0° 2	+ 13	+ 586
14	- 3	+ 285 (± 5)	- 0° 8	- 7	+ 285 (± 5)
15	- 25	+ 370	- 0° 8	- 30	+ 369
16 (voie)	+ 105 (± 11)	+ 922	- 3° 0	+ 57 (± 11)	+ 927
16	+ 48	+ 472	- 0° 8	+ 41	+ 473
17 (voie)	+ 125	+ 981 (± 13)	- 3° 0	+ 74	+ 987 (± 13)
17	+ 90 (± 5)	+ 309 (± 11)	+ 0° 4	+ 92 (± 5)	+ 311 (± 11)
18 G	+ 42	+ 610 (± 10)	- 1° 6	+ 25	+ 627 (± 10)

Nous pouvons déjà faire sur ces résultats quelques remarques intéressantes.

Précision des résultats. — Les deux mesures faites au centre de la première chambre, une fois ramenées au même azimut, sont bien concordantes; à 2 divisions près pour \mathcal{A} ; à 7 divisions près pour \mathcal{B} ; et malgré le déplacement pour la troisième mesure, l'écart reste petit.

Voie et petites chambres. — Les mesures faites sur la voie et dans les chambres, au kilomètre 16 et au kilomètre 17, donnent des

valeurs de l'effet transverse \mathfrak{A} , différentes, même en tenant compte de l'incertitude des mesures. Les différences sont de sens opposé au kilomètre 16 et au kilomètre 17. L'écart des actions longitudinales est bien plus grand au kilomètre 17 qu'au kilomètre 16. Ce n'est qu'après avoir discuté l'action propre du tunnel et des chambres, qu'on pourra reconnaître si c'est au kilomètre 16 ou au kilomètre 17 que l'accord s'établit entre la voie et la chambre voisine après correction des effets locaux; mais il est certain qu'il ne s'établira pas aux deux endroits à la fois. Il restera donc au moins à l'un des deux kilomètres 16 ou 17 un désaccord entre l'ensemble des actions lointaines et intermédiaires, à 20 mètres seulement de distance.

Je rappelle que le kilomètre 16 est tout près des puissantes sources froides.

Vu l'accord des mesures au kilomètre 1, où les conditions sont bonnes, et l'accord passable à l'observatoire nord où les conditions sont mauvaises, il me paraît impossible d'attribuer les différences beaucoup plus grandes observées aux kilomètres 16 et 17 à la différence de date des mesures.

Petites chambres; grandes chambres; voie. — Notons enfin que l'effet longitudinal est dans les limites prévues avant l'excursion.

Petites chambres.....	+ 200 à + 480
Grandes chambres.....	+ 400 à + 630
Voie.....	+ 930 à + 990

LE GÉOÏDE TEL QU'IL EST.

Tous les nombres du tableau précédent sont ramenés à l'incidence 11 degrés sur le quartz Q_2 , employée dans le plus grand nombre des mesures. Pour ramener à l'incidence normale il faut

les multiplier par 1,044 comme il a été dit au début de ce chapitre.

C'est à ces nombres ainsi multipliés que s'applique l'équation VIII de l'appareil (chap. VII, p. 114), qui donne :

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \sin 2 (\alpha - \alpha_1) \\ &= -1,093 \cdot 10^{-12} \times 1,044 \left(\mathcal{A} \cos 2 (\alpha - \alpha_t) + \mathcal{B} \sin 2 (\alpha - \alpha_t) \right) \\ &= \mathcal{A}' \cos 2 (\alpha - \alpha_t) + \mathcal{B}' \sin 2 (\alpha - \alpha_t) \end{aligned}$$

en posant

$$\begin{aligned} \mathcal{A}' &= -1,093 \cdot 10^{-12} \cdot 1,044 \mathcal{A} = \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \sin 2 (\alpha_t - \alpha_1), \\ \mathcal{B}' &= -1,093 \cdot 10^{-12} \cdot 1,044 \mathcal{B} = \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \cos 2 (\alpha_t - \alpha_1). \end{aligned}$$

On en déduit

$$\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} = \sqrt{\mathcal{A}'^2 + \mathcal{B}'^2} = 1,093 \cdot 10^{-12} \times 1,044 \sqrt{\mathcal{A}^2 + \mathcal{B}^2},$$

et

$$\operatorname{tg} 2 (\alpha_1 - \alpha_t) = -\frac{\mathcal{A}'}{\mathcal{B}'} = -\frac{\mathcal{A}}{\mathcal{B}}.$$

Ces deux éléments définissent l'orientation $(\alpha_1 - \alpha_t)$ du rayon de courbure R_1 par rapport au tunnel, et la différence des courbures $\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}$, que j'appellerai, pour abréger, l'*ellipticité* du géoïde. Pour l'angle $\alpha_1 - \alpha_t$, compris entre -45° et $+45^\circ$, le signe $+$ indique que le rayon de courbure R_1 est à droite de l'axe du tunnel en regardant vers Brigue. Le rayon R_1 suivant l'azimut α_1 , dirigé vers le centre de la terre, est toujours le plus petit, puisque l'on a choisi pour la différence $\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}$ une expression toujours positive. Tous ces éléments seront réunis dans le tableau suivant.

TABLEAU VI.

LE GÉOÏDE DANS LE TUNNEL.

KILOMÈTRES.	\mathfrak{A}'	\mathfrak{B}'	$\alpha_1 - \alpha_2 (\nearrow)$	$10^{12} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$
Obs. N.	- 699 (± 11)	+ 215 (± 9)	+ 36° 25'	731 (± 12)
1	- 78	- 548	- 4°	554
1'	- 75	- 540	- 4°	546
1''	- 81 (± 6)	- 541 (± 6)	- 4° 15' ($\pm 20'$)	547 (± 8)
2	+ 7	- 510	+ 0° 25'	510
4	+ 12	- 275	+ 1° 20'	275
5	+ 169	- 298	+ 14° 45'	342
6	+ 279 (± 5)	- 244 (± 4)	+ 24° 25' ($\pm 30'$)	370 (± 7)
7	+ 139	- 233	+ 15° 25'	272
8 G	+ 99	- 466	+ 6°	479
11	+ 129	- 306	+ 11° 20'	332
12	+ 51	- 228	+ 6° 20'	234
13 G	- 15	- 669	- 0° 40'	670
14	+ 8	- 335 (± 6)	+ 0° 40'	325 (± 6)
15	+ 34	- 421	+ 2° 20'	422
16 Voie	- 65 (± 13)	+ 1058	- 1° 45'	1068
16	- 47	- 540	- 2° 30'	542
17 Voie	- 85	+ 1126 (± 14)	- 2° 10'	1130 (± 15)
17	- 105 (± 6)	- 355 (± 12)	- 8° 10'	356 (± 11)
18 G	- 28	- 716 (± 12)	- 1° 10'	717 (± 11)

Pour interpréter ces nombres, je rappellerai que d'après M. Eötvös la somme des courbures de l'ellipsoïde de Bessel, à la latitude de 47° 30', est :

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = 3,135 \cdot 10^{-12}$$

en même unité.

La différence des courbures du géoïde dans le tunnel est :

Sur la voie de l'ordre du tiers de leur somme;

Dans les grandes chambres de l'ordre du quart de leur somme;

Dans les petites chambres de l'ordre du sixième au douzième de leur somme;

Il est peu vraisemblable que la somme des courbures varie beaucoup. L'un des rayons devient donc beaucoup plus grand, l'autre beaucoup plus petit que le rayon moyen de la terre.

Quoique nous ne sachions pas comment varie cette somme des courbures, admettons qu'elle a la valeur constante écrite ci-dessus. Nous pouvons alors calculer séparément R_1 et R_2 ; les valeurs ainsi obtenues fournissent une image qui ne peut pas différer beaucoup de la réalité. Elles sont données dans le tableau suivant en kilomètres :

TABLEAU VII.

RAYONS DE COURBURE DU GÉOÏDE DANS LE TUNNEL DU SIMPLON.

POSITION. — KILOMÈTRE.	AZIMUT DE R_1 PAR RAPPORT au tunnel vers Brigue. $\alpha_1 - \alpha_t$	R_1 EN KILOMÈTRES.	R_2 EN KILOMÈTRES.
Observ. N.	$+ 36^\circ 25'$	5170	8310
1	$- 4^\circ$	5420	7750
1'	$- 4^\circ$	5430	7720
1''	$- 4^\circ 15'$	5430	7720
2	$+ 0^\circ 25'$	5480	7620
4	$+ 1^\circ 20'$	5860	6990
5	$+ 14^\circ 45'$	5750	7150
6	$+ 24^\circ 25'$	5700	7230
7	$+ 15^\circ 25'$	5870	6980
8 G	$+ 6^\circ$	5530	7530
11	$+ 11^\circ 20'$	5760	7130
12	$+ 6^\circ 20'$	5930	6890
13 G	$- 0^\circ 40'$	5250	8110
14	$+ 0^\circ 40'$	5780	7120
15	$+ 2^\circ 20'$	5620	7370
16 Voie	$- 1^\circ 45'$	4720	9670
16	$- 2^\circ 30'$	5440	7710
17 Voie	$- 2^\circ 10'$	4690	9980
17	$- 8^\circ 10'$	5730	7200
18 G	$- 1^\circ 10'$	5190	8270

Les axes de l'ellipsoïde sont de 6,377 et 6,356 kilomètres. On voit combien le géoïde est plus ondulé que l'ellipsoïde. Partout

le rayon de courbure R_1 le plus petit est dans un azimut qui s'écarte peu de l'axe du tunnel.

Sur la voie on a trouvé 4,720 kilomètres au kilomètre 16 et 4,690 au kilomètre 17, de 5,200 à 5,500 dans les grandes chambres, 5,400 à 5,800 dans les petites. Il est donc probable que sur toute la longueur du tunnel le rayon de l'arc dont la longueur a été mesurée par la Commission géodésique s'éloigne peu de 4,700 kilomètres à 5,000 kilomètres. A ce compte, la différence des latitudes observées entre les deux observatoires de Brigue et d'Iselle doit être supérieure d'un tiers à la différence que donnerait le rapport de la longueur du tunnel au rayon moyen du globe.

Ces rayons, comparés à ceux de l'ellipsoïde, montrent bien l'effet théorique du tunnel, qui est de creuser dans l'ellipsoïde une sorte de rigole le long du tunnel, avec raccordement par des berges étendues à droite et à gauche du tunnel (fig. 11, chap. suivant). Cet effet considérable masque les actions *lointaines* et *intermédiaires*, qui se révèlent seulement dans le dernier tableau par l'angle du rayon R_1 avec le tunnel.

Il importe donc d'éliminer le plus exactement possible ces actions locales dues au tunnel et aux chambres, en mettant à profit les données de construction, et les renseignements géologiques. C'est ce que nous allons faire au chapitre suivant.

CHAPITRE XII.

ACTIONS LOCALES DU TUNNEL ET DES CHAMBRES.

A. MÉTHODES DE CALCUL.

Il faut maintenant calculer l'action propre des chambres et du tunnel pour en déduire l'ellipticité du géoïde tel qu'il serait au point où l'on a observé si le tunnel et les chambres n'y étaient point creusés.

Le potentiel U de la pesanteur est (C. G. S.) :

$$(I) \quad U = 6,7 \cdot 10^{-8} \sum \frac{m}{r} + \frac{1}{2} \omega^2 R^2,$$

comme on l'a rappelé au chapitre I.

Le potentiel, ainsi que ses dérivées premières et secondes par rapport à des axes liés au globe terrestre, est la somme de termes provenant de chacune des masses agissantes. Lors donc qu'une cavité a été creusée dans une masse, on corrige l'effet perturbateur dû à la cavité, en retranchant de l'effet observé celui que produiraient des masses égales, mais de signe contraire à celles qui occupaient la cavité. Nous supposerons toujours le milieu homogène et de densité ρ , et nous poserons :

$$U = 6,7 \cdot 10^{-8} V \cdot \rho + \frac{1}{2} \omega^2 R^2$$

$$V = \iiint \frac{dxdydz}{r}.$$

V peut être appelé la valeur géométrique du potentiel newtonien.

Ce sont les dérivées secondes de V que nous formerons; il importe de remarquer que ces dérivées sont homogènes de degré

zéro par rapport aux longueurs; ces dérivées secondes de V sont donc des nombres indépendants de l'unité de longueur ou de l'échelle des dessins sur lesquels on fait les relevés.

Cavité sphérique. — Dans une cavité sphérique (densité -1), on a :

$$V = +\frac{2}{3}\pi r^2 - 2\pi R^2$$

à une distance r du centre de la cavité; d'où

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{4}{3}\pi x, \quad \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{4}{3}\pi y, \quad \frac{\partial V}{\partial z} = \frac{4}{3}\pi z.$$

Les composantes de la force ne sont nulles qu'au centre de la cavité; en particulier, la pesanteur doit être augmentée de

$$6,7 \cdot 10^{-8} \cdot \frac{4}{3}\pi z \cdot \rho$$

lorsque l'observation est faite en dehors du plan diamétral horizontal; toutefois, pour $\rho = 2,5$, il faudrait un écart de 15 mètres vers le bas pour produire une erreur d'un millionième en plus.

On a en outre :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 V}{\partial z \partial x} = \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \frac{4}{3}\pi.$$

Les quatre combinaisons d'Eötvös sont nulles dans toute la cavité; les quatre mesures d'Eötvös peuvent donc être faites, en un point quelconque de la cavité sphérique, sans correction. Il n'en est pas de même de la mesure à la balance de Jolly, qui comporterait une correction de l'ordre du sixième de sa valeur normale

($+66.10^{-8}$ sur 370.10^{-8} environ, pour $\rho = 2,5$) quelles que soient la position de la balance et la grandeur de la cavité sphérique.

Puits circulaire vertical. — Dans un puits circulaire vertical indéfini (densité -1), le potentiel est :

$$V = \pi (x^2 + y^2) + C$$

en appelant z l'axe vertical du puits, et C la valeur du potentiel sur l'axe du cylindre.

On a alors :

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 2\pi x, \quad \frac{\partial V}{\partial y} = 2\pi y, \quad \frac{\partial V}{\partial z} = 0.$$

La pesanteur n'est pas changée, mais il s'y ajoute des forces horizontales en dehors de l'axe.

Toutes les combinaisons d'Eötvös sont nulles, ainsi que celle de Jolly. On pourrait faire toutes les mesures sans correction dans un puits vertical circulaire indéfini.

Dans un puits de profondeur limitée par un plan horizontal, il en serait encore de même pour les quatre mesures d'Eötvös, mais la pesanteur et la mesure de Jolly dépendraient de la distance au fond.

Tunnel circulaire horizontal. — On a, dans un tunnel (densité -1) :

$$V = \pi (y^2 + z^2) + C,$$

en prenant l'axe des x pour axe du tunnel,

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial y} = 2\pi y, \quad \frac{\partial V}{\partial z} = 2\pi z;$$

La pesanteur est modifiée, en dehors du plan diamétral horizontal, mais il faudrait un écart de 10 mètres vers le bas pour pro-

duire une erreur d'un millionième en plus. Il s'y ajoute une force horizontale, dans la section droite, mais il faudrait s'écarter jusqu'à 50 mètres du plan vertical diamétral pour que l'écart de la verticale atteigne 1" vers l'extérieur.

On a ensuite :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 V}{\partial z \partial x} = \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} = 0;$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 2\pi;$$

Les gradients horizontaux de la pesanteur ne sont pas modifiés par le tunnel circulaire. Les mesures au moyen de l'appareil du second type proposé mais non réalisé (chap. II, p. 16) ne seraient sujettes à aucune correction, comme je l'ai déjà fait remarquer (chap. IX, p. 121). Mais il n'en est pas de même de l'appareil effectivement employé; on a, en effet, dans tout l'intérieur du tunnel :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 2\pi,$$

par suite de l'orientation des masses déficientes.

De là résulte, pour $\rho = 2,5$:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = + 105.10^{-8}$$

quel que soit le diamètre du tunnel circulaire.

Or l'équation de mon appareil est :

$$\frac{1}{g} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right) \sin 2\alpha + \frac{2}{g} \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \cos 2\alpha = - 1,093.10^{-12} n$$

(chap. VIII, p. 114). Le déficit dû au tunnel donne donc à $+45^\circ$ de l'axe une déviation mesurée par

$$\frac{+ 105.10^{-8}}{981} \cdot \frac{10^{12}}{- 1,093} = - 984 \text{ divisions};$$

chaque augmentation de 0,1 sur la densité de la roche augmente la déviation de 39,4 divisions, ce qui donne — 1063, pour la densité moyenne du Simplon 2,7.

Comme il est impossible de connaître la densité de la roche *en place* à 0,01 près, les mesures dans le tunnel même resteront affectées, après correction de l'action du tunnel, d'une incertitude qui atteint au moins 4 divisions et qui peut être sensiblement plus grande au voisinage des roches fissurées qui livrent passage aux sources.

Action extérieure d'un tunnel circulaire. — Dans les chambres, l'action du tunnel correspond à un déficit de masses dans la direction perpendiculaire à l'axe du tunnel. Le potentiel continu avec celui de l'intérieur est (densité — 1) :

$$V = \pi R^2 \left(\log \frac{y^2 + z^2}{R^2} + 1 \right) + C$$

en appelant R le rayon du tunnel.

On en tire

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial y} = 2\pi R^2 \frac{y}{y^2 + z^2}, \quad \frac{\partial V}{\partial z} = 2\pi R^2 \frac{z}{y^2 + z^2};$$

il y a donc une correction de pesanteur et une petite force horizontale à l'opposé du tunnel, toutes deux négligeables comme plus haut.

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 2\pi R^2 \frac{z^2 - y^2}{(y^2 + z^2)^2}, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 2\pi R^2 \frac{y^2 - z^2}{(y^2 + z^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z} = -2\pi R^2 \frac{2yz}{(y^2 + z^2)^2}.$$

Au voisinage du tunnel, la pesanteur croît à mesure qu'on s'en

éloigne, si on reste dans un plan horizontal inférieur à l'axe du tunnel. Dans les petites chambres, si le tunnel du Simplon était circulaire ($R = 250$, $y = 387$, $z = 100$) [C. G. S.], $\frac{\partial g}{\partial y}$ atteindrait environ $2 \cdot 10^{-7}$, c'est-à-dire vingt-cinq fois le gradient dû à l'ellipsoïde de Bessel. Quant à $\frac{\partial g}{\partial z}$, de l'ordre de $4 \cdot 10^{-7}$, il resterait inappréciable à la balance de Jolly.

$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}$ a sensiblement la même valeur $4 \cdot 10^{-7}$ et doit produire dans mon appareil une déviation de $+380$ divisions pour une roche de densité 2,5, et de $+410$ divisions si la densité de la roche atteint 2,7, avec une incertitude de 1,5 division pour une variation de 0,01 dans la densité. C'est encore une correction considérable.

Changement de forme des surfaces de niveau par suite de l'action du tunnel. — Dans la roche continue, les surfaces de niveau seraient des plans parallèles donnés par

$$U = U_0 + gz + \frac{z^2}{2} \left(2\omega^2 - 6,7 \cdot 10^{-8} \cdot 4\pi\rho \right)$$

comme il résulte de l'équation II (chap. I). Dans l'intérieur du tunnel, le potentiel est donc :

$$U = U_1 + gz + \frac{z^2}{2} \left(2\omega^2 - 6,7 \cdot 10^{-8} \cdot 4\pi\rho \right) \\ + 6,7 \cdot 10^{-8} \rho\pi \left(y^2 + z^2 \right)$$

en posant

$$U_1 = U_0 + C,$$

et dans la roche au voisinage du tunnel :

$$U = U_1 + gz + \frac{z^2}{2} \left(2\omega^2 - 6,7 \cdot 10^{-8} \cdot 4\pi\rho \right) \\ + 6,7 \cdot 10^{-8} \cdot \rho\pi R^2 \left(\log \frac{y^2 + z^2}{R^2} + 1 \right).$$

Ces expressions restent indépendantes de x ; les surfaces de niveau deviennent donc des cylindres à génératrices parallèles à l'axe du tunnel. Dans le tunnel, la partie utile de ces cylindres est la partie inférieure, creuse; leur section est elliptique, et le centre de l'ellipse est à la très grande hauteur :

$$\frac{g}{6,7 \cdot 10^{-8} \cdot 6\pi\rho}, \text{ environ } 3 \cdot 10^8 \text{ centimètres}$$

pour $\rho = 2,5$. Le rayon de courbure est donné par

$$\frac{g}{R_2} = -6,7 \cdot 10^{-8} \cdot \rho \cdot 2\pi = -105 \cdot 10^{-8} \quad (\rho = 2,5).$$

Les surfaces de niveau sont concaves vers le haut, avec un rayon de courbure d'environ 10,000 kilomètres lorsque la densité de la roche est de 2,5. La plus large de ces surfaces, celle qui se trouve au milieu de la hauteur du tunnel cylindrique de 5 mètres de diamètre, a une flèche de $3 \cdot 10^{-5}$ cm. ou $0^{\mu},3$, une demi-longueur d'onde, d'un bord à l'autre du tunnel. C'est cette flèche prodigieusement petite qui donne une déviation de 1,000 divisions.

A l'extérieur, on a :

$$\frac{g}{R_2} = -6,7 \cdot 10^{-8} \rho \cdot 2\pi R^2 \cdot \frac{z^2 - y^2}{(y^2 + z^2)^2};$$

le sens de la courbure dépend de la région. Il change en traversant les deux plans diamétraux inclinés à 45 degrés sur l'horizon. Dans l'espace angulaire vertical compris entre ces plans ($z^2 - y^2 > 0$), le rayon de courbure est négatif, les surfaces sont concaves vers le haut, comme dans l'intérieur du tunnel, mais le rayon de courbure au fond de la concavité croît comme le carré de la distance verticale au tunnel. La flèche, au-dessous de la corde des points d'inflexion, reste sensiblement indépendante de la surface de niveau considérée, et égale à

$$\frac{6,7 \cdot 10^{-8} \rho \cdot \pi R^2}{g} \log 2,$$

soit $2,2 \cdot 10^{-5}$ cm., ou $0^{\mu},22$, un cinquième de micron pour $\rho = 2,5$, dans le cas du tunnel du Simplon.

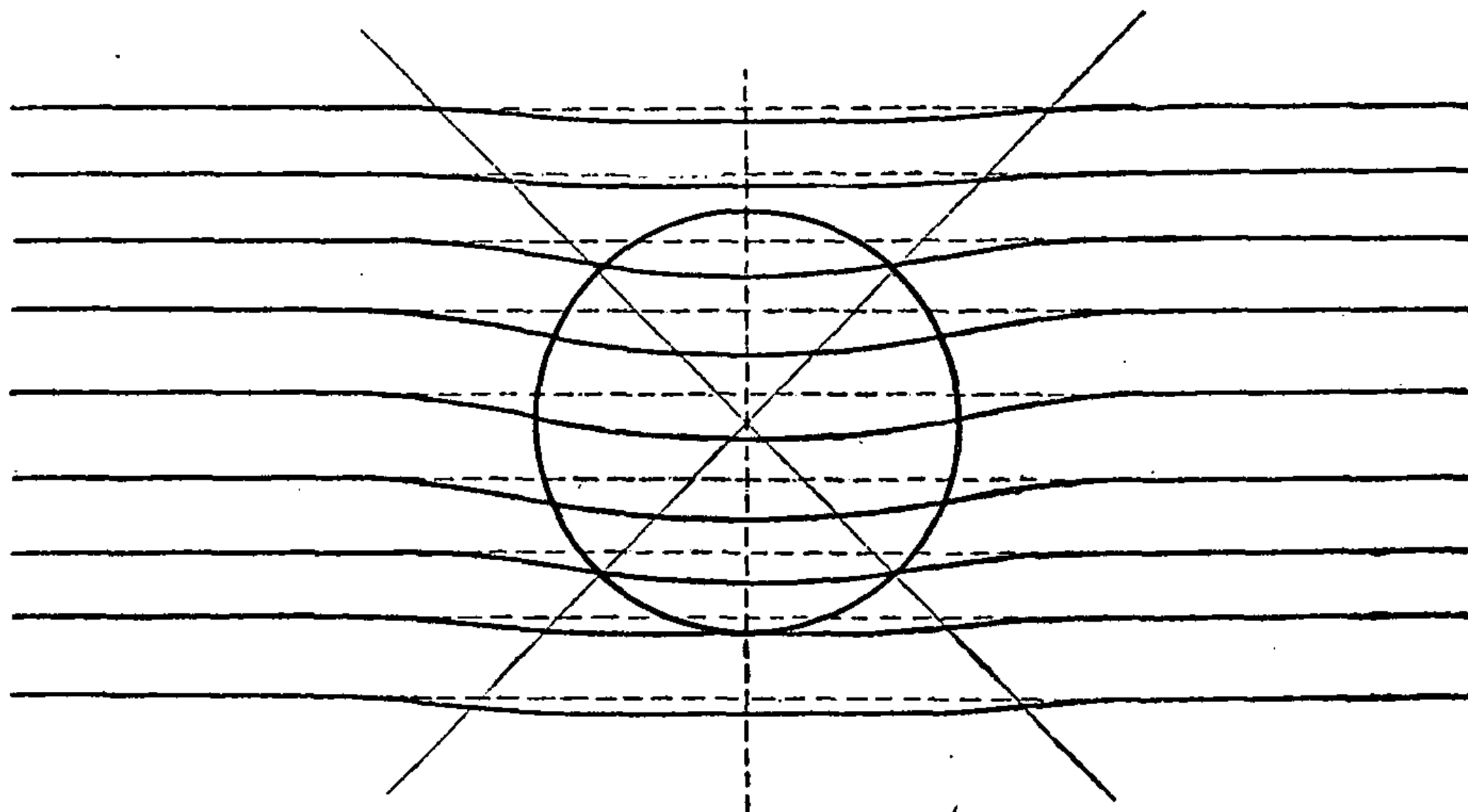


Fig. 11.

Pour représenter exactement les surfaces de niveau, la flèche verticale devrait être réduite au millionième de ce qu'elle est sur la figure.

Dans tout l'espace étendu horizontalement entre ces mêmes plans à 45 degrés, le rayon de courbure est de sens contraire, les surfaces de niveau sont convexes vers le haut et s'aplatissent à mesure qu'on s'éloigne, mais elles ne cessent de s'élever, et on ne peut définir aucune flèche déterminée entre les points très éloignés; c'est le caractère bien connu de ces expressions logarithmiques, qui ne sont physiquement valables qu'à des distances transverses petites par rapport à la longueur réelle du tunnel.

Tunnel de section quelconque. — Le tunnel n'a malheureusement pas la forme simple d'un tube circulaire; il faut établir les formules qui permettent de calculer son action lorsqu'on connaît son gabarit. Le potentiel géométrique (densité + 1) produit

en un point yz par un cylindre élémentaire de base $d\eta d\zeta$ au point η, ζ et parallèle à Ox , est :

$$-\log \left((y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2 \right) d\eta d\zeta.$$

Pour un tunnel de section droite étendue (densité -1), on a donc :

$$V = + \iint \log \left((y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2 \right) d\eta d\zeta.$$

Posons

$$r^2 = (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2$$

et formons la dérivée seconde qui nous intéresse :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} &= \iint d\eta d\zeta \frac{\partial^2}{\partial y^2} \log(r^2) \\ &= \iint d\eta d\zeta \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \log(r^2) \\ &= \int 2 \frac{\eta - y}{r^3} d\zeta \end{aligned}$$

l'intégrale était prise le long de tout le contour du gabarit en allant de l'axe η vers l'axe ζ .

Supposons le contour défini en coordonnées polaires r, θ , ayant le lieu d'observation pour origine, et comptons l'angle θ de l'horizontale $O\eta$ vers $O\zeta$.

$$\eta - y = r \cos \theta, \quad \zeta - z = r \sin \theta$$

$$2 \frac{\eta - y}{r^3} d\zeta = 2 \cos^2 \theta d\theta + 2 \sin \theta \cos \theta \frac{dr}{r}.$$

En intégrant le second terme par parties et en se rappelant que le contour se ferme, on obtient :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = - \int \log r \cdot d(\sin 2\theta), \quad \text{appareil extérieur.}$$

centre C est à la distance D de l'appareil A. La droite AC fait avec l'horizontale An l'angle δ dans le sens positif; le rayon AM ou r fait l'angle θ avec An et φ avec AC, en sorte que l'on a :

$$\theta = \varphi + \delta.$$

Soit enfin γ l'angle du rayon CM avec l'horizontale.

Les quadratures se font sans difficulté en prenant comme variable l'angle CMA en M, et conduisent au résultat suivant :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = \begin{cases} \theta_2 - \theta_1 - (\gamma_2 - \gamma_1 - \theta_2 + \theta_1) \frac{R^2}{D^2} \cos 2\delta \\ - \frac{R^2}{D^2} \sin 2\delta \cdot \log \left(\frac{r_2}{r_1} \right) \\ + \frac{r_2}{D} \sin (\delta + \theta_2) - \frac{r_1}{D} \sin (\delta + \theta_1). \end{cases}$$

L'arc est supposé parcouru de l'extrémité 1 à l'extrémité 2, dans le sens où l'on parcourt l'ensemble du contour pour envelopper dans le sens positif le vide du tunnel.

Ligne droite (fig. 13). — Soit δ l'angle que fait avec l'horizontale On la normale abaissée de l'appareil A sur la droite; θ l'angle du rayon vecteur AM ou R avec l'horizontale. On obtient avec la même convention sur le sens du parcours :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = (\theta_2 - \theta_1) (1 + \cos 2\delta) - \sin 2\delta \cdot \log \left(\frac{r_2}{r_1} \right);$$

l'angle δ peut être augmenté ou diminué de π sans rien changer.

Remarque. — Les angles θ et les rayons vecteurs r de la fin d'une partie du contour sont aussi ceux du début de la partie suivante. Il en est de même des angles γ lorsque le contour ne présente pas d'angles vifs.

Les angles δ et les longueurs D, R sont faciles à relever sur l'épure de la section du tunnel ou à calculer au moyen des données de construction de cette épure.

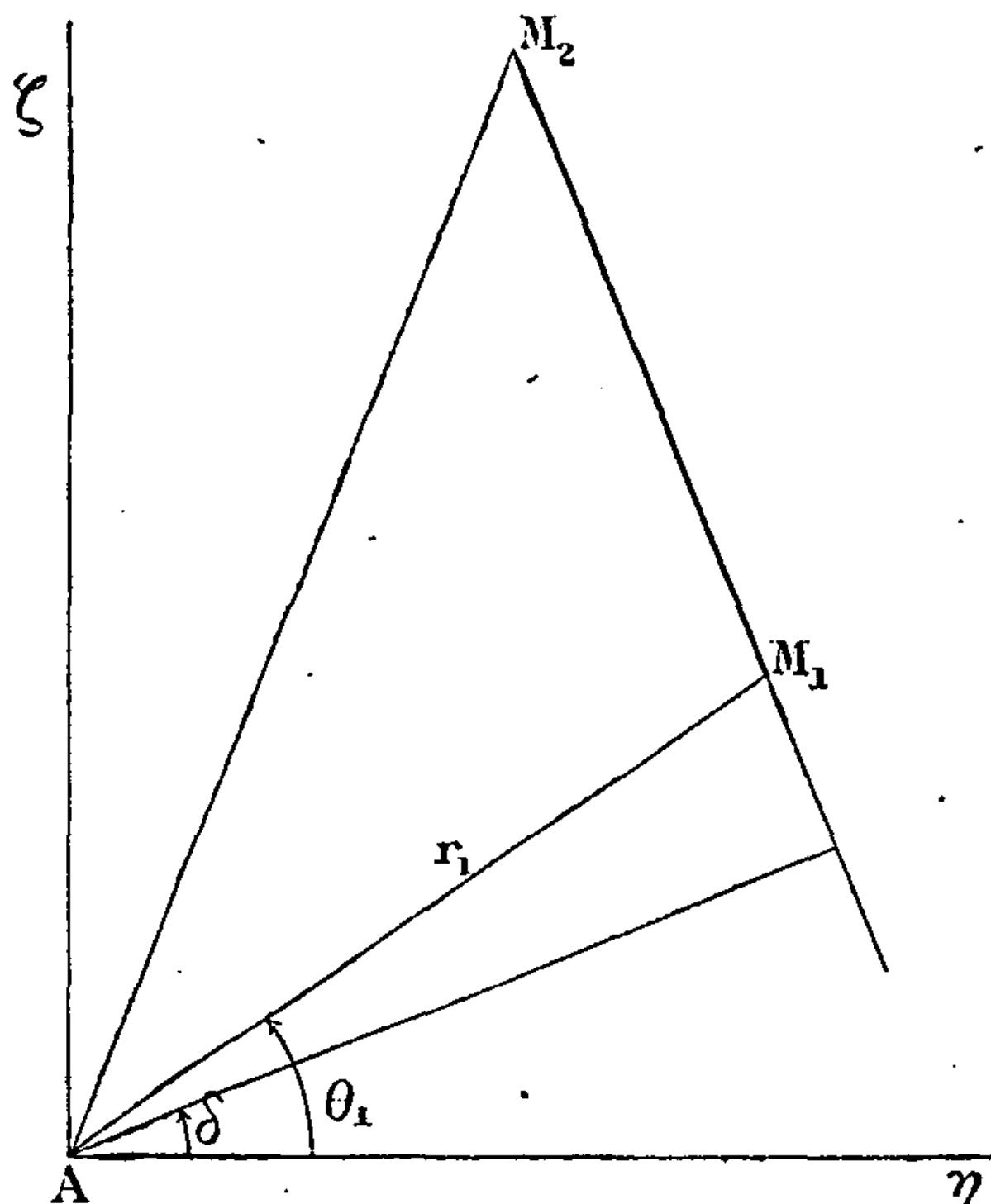


Fig. 13.

Tunnel rectangulaire à parois verticales et horizontales. — Soient $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$ les angles sous-tendus par les côtés successifs du contour, à partir du sol, vus de l'appareil. On a, lorsque l'appareil est intérieur,

$$\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \omega_4 = 2\pi;$$

les δ successifs sont $-\frac{\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{2}, \pi$, et la formule donne (densité -1) :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 2 (\omega_2 + \omega_4),$$

ω_2 et ω_4 sont les angles sous-tendus par les parois verticales.

Lorsque l'appareil est extérieur on a :

$$\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \omega_4 = 0$$

et on peut conserver les mêmes valeurs pour les δ ; on a encore :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 2 (\omega_2 + \omega_4),$$

mais les angles ω_2 et ω_4 sont de signes opposés quand l'appareil est en dehors des prolongements des parois verticales.

Tunnel triangulaire. Appareil extérieur. Un côté horizontal et un côté vertical. — Décrivons le triangle dans le sens positif en commençant par l'hypoténuse, dont les deux extrémités sont aux distances r_1 r_2 de l'appareil.

Soient ω_h , ω_v les angles sous-tendus par l'hypoténuse et par la paroi verticale, et δ l'angle de l'hypoténuse avec le côté vertical :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 2\omega_v + \omega_h (1 + \cos 2\delta) - \sin 2\delta \cdot \log \frac{r_2}{r_1}.$$

(densité — 1).

Tunnel en segment circulaire, compris entre un arc de circonférence et sa corde. Appareil extérieur. — Soit δ_c l'angle δ relatif au centre de l'arc, et δ_b l'angle relatif à la droite. Soit 2γ l'angle sous lequel l'arc est vu du centre de la circonférence et ω l'angle sous il est vu de l'appareil :

$$\omega = \theta_2 - \theta_1$$

toujours avec la même convention de sens de parcours.

On obtient, après quelques réductions,

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = \begin{cases} -\omega \cos 2\delta_b - (2\gamma - \omega) \frac{R^2}{D^2} \cos 2\delta_c \\ + \left(\sin 2\delta_b - \frac{R^2}{D^2} \sin 2\delta_c \right) \log \frac{r_2}{r_1} \\ + \frac{r_2}{D} \sin(\delta_c + \theta_2) - \frac{r_1}{D} \sin(\delta_c + \theta_1), \end{cases}$$

l'arc étant parcouru de 1 vers 2 (densité = 1).

Application au tunnel. — L'action du tunnel a été évaluée de deux manières différentes :

1° M. Kannapell a *calculé* d'après les données de construction et de position de l'appareil tous les éléments qui définissent les parties successives, rectilignes ou circulaires du contour, et a calculé l'action de chacune d'elles.

2° J'ai dessiné à grande échelle (5 centimètres par mètre) le contour du tunnel et les positions de l'appareil; j'ai tracé un grand rectangle de comparaison et j'ai mesuré au rapporteur et à la règle divisée les éléments nécessaires pour définir le tunnel rectangle de référence et les petits tunnels triangulaires ou en segment circulaire, à ajouter au rectangle ou à en retrancher pour reconstituer le contour vrai. J'ai ensuite calculé toutes ces actions. La précision qu'on obtient ainsi (0°, 1 et 0 millim. 5 dans les lectures) correspond sensiblement au centimètre en vraie grandeur; c'est évidemment tout ce qu'on peut attendre comme conformité de la maçonnerie au gabarit.

Chambres. — Les niches et chambres latérales au tunnel ont toutes une base rectangulaire, des parois verticales et une voûte dont la flèche est petite. Elles s'ouvrent sur le tunnel à travers un piédroit qui n'est pas vertical et un commencement de voûte. On peut les comparer utilement à un parallélépipède rectangle et éva-

luer grossièrement l'action des petits volumes complémentaires, raccord avec le tunnel et espace compris entre la voûte et le plafond tangent à son sommet. Pour cela on subdivise ces volumes en éléments prismatiques auxquels on applique la formule élémentaire

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 3 \frac{\eta^2 - \xi^2}{r^2} \frac{v}{r^3}$$

pour une densité $+1$ dans le volume v . Il faut choisir le volume assez petit pour que les coordonnées ξ , η et la distance r du centre du volume v à l'appareil pris pour origine soient bien définies; aucune des dimensions du volume v ne doit être vue de l'appareil sous un angle supérieur à une dizaine de degrés.

Parallélépipède rectangle. Appareil extérieur. — On obtient facilement une expression simple de cette action en partant d'un résultat connu dans la théorie du potentiel. Considérons une plaque rectangulaire perpendiculaire à Ox , à côtés verticaux et horizontaux, dont les sommets ont pour coordonnées :

$$\xi_1 \eta_1 \zeta_1; \quad \xi_1 \eta_1 \zeta_2; \quad \xi_1 \eta_2 \zeta_1; \quad \xi_1 \eta_2 \zeta_2.$$

La composante X de l'attraction exercée par la plaque de densité superficielle $+\sigma$, sur un point xyz , est :

$$X = \sigma \left| \begin{matrix} \zeta_2 \\ \zeta_1 \end{matrix} \right|_{\eta_1}^{\eta_2} \text{arc tg} \frac{(\eta - y)(\zeta - z)}{(\xi_1 - x)r}.$$

Considérons maintenant le parallélépipède rectangle, de densité ρ , obtenu en déplaçant la plaque de ξ_1 à ξ_2 , nous aurons :

$$X = \rho \left| \begin{matrix} \zeta_2 \\ \zeta_1 \end{matrix} \right|_{\eta_1}^{\eta_2} \int_{\xi_1}^{\xi_2} \left(\text{arc tg} \frac{(\eta - y)(\zeta - z)}{(\xi - x)r} \right) d\xi,$$

et, comme ξ et x n'entrent que par leur différence $(\xi - x)$,

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = + \left| \begin{array}{c} \zeta_2 \\ \zeta_1 \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} \eta_2 \\ \eta_1 \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} \xi_2 \\ \xi_1 \end{array} \right| \text{arc tg } \frac{(\eta - y)(\zeta - z)}{(\xi - x)r}$$

(densité -1).

On obtient de même $\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$, et en plaçant l'appareil à l'origine pour simplifier l'écriture :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = - \left| \begin{array}{c} \zeta_2 \\ \zeta_1 \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} \eta_2 \\ \eta_1 \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} \xi_2 \\ \xi_1 \end{array} \right| \left(\text{arc tg } \frac{\eta\zeta}{\xi r} - \text{arc tg } \frac{\xi\zeta}{\eta r} \right),$$

la densité du parallélépipède étant -1 .

Remarque. — Il est toujours possible de supposer l'appareil hors des masses agissantes, en remarquant que, par symétrie, l'action est nulle sur la verticale du centre d'une cavité prismatique à base carrée. Pour les petites chambres, dont la base est carrée, ce terme principal est nul; pour les grandes chambres, qui sont allongées dans le sens perpendiculaire au tunnel, il suffit de calculer l'action des deux bouts, situés au delà du prisme carré de côté égal à la largeur.

B. RÉSULTATS.

Éléments du calcul. — Les gabarits de construction du tunnel, des niches et des chambres m'ont été transmis par la Direction des chemins de fer fédéraux suisses. Les feuilles lithographiées donnent le profil type, reproduit dans la planche IV, et les profils spéciaux employés dans certaines régions du tunnel en raison de la nature des roches, moins solides, ou des infiltrations d'eau. Tout le détail de la construction du tunnel, — position exacte des chambres, niches, traverses, etc., — est figuré sur deux longues bandes de papier à l'échelle $\frac{1}{20}$, grâce auxquelles j'ai trouvé tous les renseignements sur le mode de construction adopté au lieu même de la construction et dans son voisinage. On trouvera plus loin tous ceux de ces renseignements qui sont utiles pour le calcul.

Actions locales calculées. Petites chambres. — Voici les résultats des calculs numériques effectués au moyen des données de construction :

	DENSITÉ.	$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$
Vide du tunnel jusqu'à la voie.	— 1	— 2,116 + 0,065 h
Espace ballasté au-dessous de la voie	— 1	— 0,235 + 0,017 h
Niche électrique	— 1	— 0,125
Espace ballasté	— 1	— 0,008
Raccord de la chambre et du tunnel	— 1	— 0,220 + 0,025 h
Ballast de la chambre limité au seuil.	— 1	+ 0,052 — 0,004 h
Espace compris entre la voûte de la chambre et le plan tangent supérieur.	+ 1	— 0,040 + 0,007 h
Maçonnerie de la voûte du tunnel (épaisseur 50 cm).	+ 1	— 0,065

(h est l'abaissement du trépied en décimètres.)

Grandes chambres :

	DENSITÉ.	$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$
Vide du tunnel jusqu'à la voie.	— 1	— 1,252 + 0,033 h
Espace ballasté au-dessous de la voie	— 1	— 0,152 + 0,005 h
Niche électrique	— 1	— 0,072
Espace ballasté	— 1	— 0,004
Raccord de la chambre et du tunnel	— 1	— 0,040 + 0,004 h
Extrémités de la grande chamb ^{re} .	— 1	— 2,133 + 0,121 h
Ballast de la chambre limité au seuil.	— 1	— 0,042 — 0,005 h
Espace compris entre la voûte de la chambre et le plan tangent supérieur.	+ 1	— 0,056 + 0,005 h
Maçonnerie de la voûte de la chambre (épaisseur 50 cm.).	+ 1	+ 0,075
Maçonnerie de la voûte du tunnel (épaisseur 50 cm.).	+ 1	+ 0,045

Axe du tunnel :

	DENSITÉ.	$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$
Tunnel jusqu'à la voie.	— 1	+ 5,750
Espace ballasté au-dessous de la voie	— 1	+ 0,621
Maçonnerie de la voûte du tun- nel (épaisseur 50 cm.)	+ 1	— 0,206

Toutes ces valeurs numériques principales se rapportent à une hauteur 1 m. 04 du balancier de l'appareil au-dessus de la voie et à une position correcte de l'appareil dans le plan de symétrie du tunnel ou au centre des chambres.

Dans l'axe du tunnel, la hauteur était certainement correcte à moins de 2 centimètres près, si le niveau du ballast était bien lui-même conforme au gabarit.

Dans les chambres, incomplètement ballastées, l'appareil était un peu plus bas — et inégalement. L'erreur qui en résulte n'est malheureusement pas négligeable. Dans les petites chambres, un abaissement de 10 centimètres *diminue* la valeur absolue de l'action calculée d'à peu près 0,09, c'est-à-dire $\frac{1}{25}$ environ de l'action calculée. Dans les grandes chambres, la diminution est moindre, à peu près 0,05 et en valeur relative seulement $\frac{1}{70}$ environ.

Bien que peu précises, les indications que j'ai notées sur le moment ne laissent pas d'incertitude supérieure à ± 5 centimètres sur l'altitude, c'est-à-dire $\pm \frac{1}{50}$ pour les mesures effectuées dans les petites chambres. J'indiquerai pour chacune d'elles la correction d'altitude adoptée.

Maçonnerie. — Quelle que soit l'épaisseur de la voûte, le profil du vide du tunnel reste le même. C'est donc seulement par la différence entre la densité de la maçonnerie et celle du roc que se fait sentir l'influence des différents modes de construction. Cette différence de densité n'est pas très grande, lorsque la maçonnerie

est faite en pierre de carrière; elle est certainement beaucoup plus grande lorsque la voûte est faite en moellons de ciment, mais dans ce dernier cas elle est mieux connue. En outre, l'aire dégagée dans le roc a toujours dépassé notablement le diagramme, d'environ 3 mètres carrés, un peu moins du côté Nord (2 m. 70 à 2 m. 80), un peu plus au milieu (3 mètres à 3 m. 30), beaucoup plus au delà du milieu, du côté Sud (jusqu'à 5 mètres carrés), et à l'extrémité S (3 m. 50). Pour un périmètre d'environ 20 mètres⁽¹⁾, cela correspond à un excès d'épaisseur de maçonnerie d'environ 15 centimètres, allant jusqu'à 25 centimètres dans la partie la plus difficile du tunnel Sud.

Ces excès sont indiqués par trimestre dans le bulletin trimestriel de l'entreprise, mais le kilomètre auxquels ils se rapportent n'est pas précisé. Pour la première période des travaux, la répartition de ces excès entre le radier, les piédroits et la voûte est indiquée; mais cette indication manque pour la moitié au moins du tunnel. Tout cet espace creusé en excès a été rempli de maçonnerie pleine et cimentée; la densité de la matière dans tout cet espace est celle de la maçonnerie; mais l'étendue et la forme de cet espace dans la région où ont été faites les observations reste mal connue. L'incertitude qui en résulte n'est pas du tout négligeable et dépasse les erreurs d'observation.

Matériaux de construction. — La densité de la pierre employée à la construction est malheureusement inconnue. Pour les premiers kilomètres Nord, le bulletin indique que les moellons ont été extraits de la carrière de la Massa et quelques voussoirs des carrières de Saint-Triphon. Pour les premiers kilomètres Sud, les pierres ont été taillées dans des blocs de gneiss éboulés vis-à-vis de la tête du tunnel sur la rive droite de la Diveria; un peu plus tard, de gros blocs dans le lit du Reale Royale, puis dans une carrière de Sassomare. Mais depuis 1903, c'est-à-dire pour tout le milieu du tun-

⁽¹⁾ 14 m. 70 de maçonnerie, à l'intrados, + 4 m. 40 de radier = 19 m. 10.

nel, les indications manquent. Toutes ces pierres sont analogues au gneiss d'Antigorio; malheureusement cela ne suffit pas à fixer la densité; car, dans le tunnel, la densité de ce gneiss, pris à différentes profondeurs; change de 2,606 à 2,70 et, exceptionnellement, à 2,781⁽¹⁾, suivant sa richesse en mica.

Pour remédier à cette incertitude, je me suis décidé à retourner chercher des renseignements sur place (août 1907). Grâce à l'inépuisable complaisance de la Direction des Chemins de fer fédéraux, et en particulier de M. l'ingénieur en chef Cuénod, j'ai pu recueillir sur place des échantillons de pierre dans chacune des carrières utilisées pour la maçonnerie, et prélever dans le second tunnel, parallèle au premier, des morceaux de roc en regard des chambres pour lesquelles les mesures transmises par la direction des Chemins de fer fédéraux ne me renseignaient pas suffisamment. Voici les principaux résultats, dont on trouvera le détail en appendice. Au nord, deux échantillons de pierre de la Massa, d'apparence bien homogène, ont une densité très peu différente, comprise entre 2,63 et 2,64 à l'état humide. Au sud, les gneiss qui ont servi au remplissage proviennent d'un éboulement dont l'échantillon que j'ai rapporté a une densité 2,74; ceux qui ont servi à faire les parements proviennent, les uns, d'un éboulement (densité 2,66), la plupart d'une carrière (densité 2,63 à 2,64). Les moellons proviennent de deux carrières (densités 2,63 et 2,645). Les moellons de ciment ont au nord la densité 2,16 et au sud 2,26, à l'état humide.

J'ignore néanmoins quelle est *en chaque station* la densité exacte des matériaux de construction. Dans ces conditions, il m'a paru raisonnable de tout calculer comme si la roche du tunnel s'étendait jusqu'au profil intérieur lui-même, et d'indiquer *approximativement* en grandeur et en signe la correction qui resterait à faire par suite de la différence entre la densité de la roche et la densité de la maçonnerie; j'ai adopté pour celle-ci la valeur moyenne 2,63

⁽¹⁾ Kilom. 6,550 de Brigue.

au nord et 2,65 au sud (intermédiaire entre la densité des moellons 2,63 à 2,64 et celle des pierres de maçonnerie irrégulière et probablement moins serrée 2,74), lorsque la construction est en gneiss, et la valeur moyenne 2,2 pour les voûtes construites en moellons de ciment.

De même, la densité du ballast en place m'a été indiquée comme égale à 2,0, les wagons chargés de 5 mètres cubes de ballast pesant 10 tonnes; je suppose que l'incertitude atteint bien un dixième probablement par défaut.

Maçonnerie du tunnel. — S'il est difficile de faire une correction sûre relative à la différence entre la densité de la pierre de construction et celle de la roche avoisinante, on peut du moins se faire assez simplement une idée de son importance de la manière suivante :

L'action extérieure du vide du tunnel est sensiblement proportionnelle à l'aire vide pour une même distance à l'axe. L'aire du vide du tunnel est environ 25 mq. 5, dont 2 mq. 5 pour le ballast. L'aire réellement excavée S est presque partout de 34 mq. 5, en excès de 3 mètres carrés sur le gabarit, donnant une aire de maçonnerie de 9 mètres carrés (exceptionnellement portée jusqu'à 11 mètres carrés dans une partie du tunnel sud). L'accroissement *relatif* d'action du tunnel, eu égard au déficit de densité $\rho - \rho_m$ de la maçonnerie sur le roc, est donc sensiblement :

$$\frac{\rho - \rho_m}{\rho} \cdot \frac{9}{24,5}$$

dont la valeur nullement négligeable atteint $\frac{1}{70}$ pour une différence de densité égale à 0,1. En adoptant la densité moyenne $\rho_m = 2,65$, et supposant l'erreur sur la densité inférieure à $\pm 0,05$, l'incertitude est réduite à $\frac{1}{140}$, ce qui est encore beaucoup.

Faisons donc cette correction le mieux possible. L'aire du vide du tunnel jusqu'à la maçonnerie et au radier est 24 mq. 5. L'aire

prévue de la maçonnerie, piédroits et voûte de 40 centimètres d'épaisseur, étant de 6 mètres carrés, le périmètre de cette partie du tunnel est sensiblement $\frac{6}{0,4} = 15$ mètres, tandis qu'en y ajoutant le radier, le périmètre atteint sensiblement 20 mètres. L'excès d'excavation supposé uniformément réparti sur tout le périmètre correspond à une augmentation d'épaisseur d'environ 15 centimètres. L'épaisseur de la maçonnerie est donc sensiblement 55 centimètres en réalité, dont 40 centimètres sont construits en moellons taillés, et le reste en maçonnerie irrégulière.

Un contour parallèle au vide du tunnel enfermerait la maçonnerie (9 mq.) augmenté de $5 \times 0,55 = 2$ mq. 75 environ sous le radier; au total, 11 mq. 75. Soit A l'action exercée par le vide du tunnel d'aire 24,5, à densité -1 , l'action exercée par cet anneau serait sensiblement $A \cdot \frac{11,75}{24,5}$. Il faut en retrancher l'action de l'aire rectangulaire sous le radier, facile à déduire approximativement de celle de l'aire ballastée, en tenant compte de la différence d'épaisseur $\left(\frac{55}{45}\right)$, de largeur $\left(\frac{6}{5}\right)$ et de niveau (5 déc. plus loin du niveau de l'appareil).

On trouve ainsi :

PETITES CHAMBRES : $-2,116 \cdot \frac{11,75}{24,5} + 0,468 = -0,545$ avec la densité -1 , et avec la densité relative $\rho_m - \rho$ (où $\rho_m = 2,65$) [côté S] :

$$-(\rho - 2,65) 0,545.$$

GRANDES CHAMBRES : $-1,252 \cdot \frac{11,75}{24,5} + 0,260 = -0,342$ avec la densité -1 , et avec la densité relative $\rho_m - \rho$ (où $\rho_m = 2,65$) [côté S] :

$$-(\rho - 2,65) 0,342.$$

TUNNEL. — Dans le tunnel, un accroissement par similitude ayant l'appareil pour centre ne changerait rien. Mais c'est par rap-

port à un point situé à mi-hauteur du tunnel, c'est-à-dire 1 m. 50 environ au-dessus de l'appareil que l'excavation peut être regardée comme à peu près semblable au profil interne, avec un coefficient de similitude $1 + \frac{0,55}{2,75} = 1,2$ environ. L'effet est donc le même que si l'appareil était rapproché à distance $\frac{1,5}{1,2} = 1$ m. 25 de l'axe, c'est-à-dire remonté de 25 centimètres, ce qui accroît l'action d'environ $\frac{3}{78}$ ou 0,039. L'action de tout l'anneau avec densité -1 est donc $+6,371 \cdot 0,039$ ou $+0,248$.

Il faut en retrancher l'action de la partie non excavée, sous le radier, $+0,560$. L'action de la maçonnerie, avec densité -1 , serait donc :

$$0,248 - 0,560 = -0,312,$$

et en réalité :

$$-(\rho - 2,65) 0,312.$$

Maçonnerie des chambres. — L'épaisseur de maçonnerie des chambres est, d'après le gabarit de construction, de 40 centimètres et atteint en réalité entre 50 et 60 centimètres, suivant l'importance de l'excès d'excavation. Dans les petites chambres, de base carrée, l'action de cette maçonnerie serait nulle, par symétrie, si l'entrée de la chambre était close par une muraille pareille à celle du fond. L'action de la maçonnerie est donc égale et opposée à celle d'une telle muraille occupant sensiblement la position du raccord avec le tunnel. Cette action est facile à calculer pour une épaisseur de 50 centimètres, une largeur de 4 mètres et une hauteur de 3 m. 30, en comptant jusqu'au roc.

On obtient ainsi, comme effet dû à la différence de densité de la maçonnerie et du roc des petites chambres :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = +(\rho_m - \rho) 0,95 = -0,95 (\rho - 2,65)$$

et l'incertitude 0,05 sur la densité de la maçonnerie laisse une incertitude de 0,05 sur la valeur absolue de cette correction.

Dans les grandes chambres, la situation est un peu différente à cause de l'absence de muraille du fond. Il faut calculer l'action de chacun des parallélépipèdes qui correspondent aux murs formant piédroits, à la voûte et à l'excès de profondeur. Pour les murs et la voûte, le calcul qui suit se rapporte à une épaisseur de 50 centimètres; pour le fond, à une épaisseur de 15 centimètres, admise d'après les valeurs ordinaires de l'excès d'excavation et conforme à mes souvenirs.

Fond (15 centimètres) .:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = -\rho \cdot 0,061.$$

Murs :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = -(\rho_m - \rho) 1,388.$$

Voûte :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = +(\rho_m - \rho) 0,075.$$

Niches. Seconde galerie. — Outre les chambres kilométriques, on a réservé dans la même paroi du tunnel de petites niches tous les 50 mètres; cette distance est assez grande et leur volume est assez petit pour que leur action soit absolument négligeable.

Le projet primitif comportait deux tunnels égaux, parallèles à une distance de 17 mètres l'un de l'autre, réunis tous les 200 mètres par des *traverses* obliques, et tous les 5 kilomètres par de larges ouvertures, qui sont devenues les *grandes chambres*. Le second tunnel n'a pas été creusé sur toute sa section droite; il est réduit à une galerie de 9 mètres carrés de section droite environ (8 mq. 3 au gabarit) qui a été constamment utilisée pendant la construction pour l'aérage et le refroidissement du tunnel principal, les *traverses* obliques qui les réunissent permettant de faire

revenir par la deuxième galerie l'air amené par le tunnel jusqu'au front d'attaque. Cette seconde galerie n'a été maçonnée que sur une petite partie de sa longueur, là où la roche était friable ou trop perméable. Elle sert surtout maintenant à l'écoulement de toutes les sources abondantes.

Nous traiterons cette galerie comme ayant une section de 9 mètres carrés et une densité $-\rho$. D'après les gabarits, son axe est à 15 m. 90 de l'axe du tunnel, à 11 m. 90 du centre des petites chambres et à 10 m. 40 du centre des grandes chambres.

Tunnel :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = -\frac{2S}{r^2} = -\frac{2 \cdot 9}{(15,9)^2} = -0,071 \cdot \rho.$$

Petites chambres :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = -\frac{2 \cdot 9}{(11,9)^2} = -0,127 \cdot \rho.$$

Grandes chambres :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = -\frac{2 \cdot 9}{(11,4)^2} = -0,166 \cdot \rho.$$

Galeries transverses. — Les galeries transverses sont généralement à 100 mètres de part et d'autre des chambres d'observation; à cette distance leur action est nulle. En deux endroits seulement leur situation est différente. A la chambre XI, qui a été percée par le chantier Nord, au delà de la station centrale, la galerie transverse (LIII) est à 41 mètres au Sud de la chambre.

A la chambre XVI, près des puissantes sources froides, la galerie transverse qui suit immédiatement, au Nord, est à 40 m. 23 de la chambre, et par conséquent à 20 mètres seule-

ment (peut-être à 19 mètres⁽¹⁾) de la station dans l'axe du tunnel.

Traisons la galerie transverse de section S comme une ligne de densité $-S$, parallèle à l'axe Ox' , dont les extrémités ont pour coordonnées par rapport à l'appareil ξ'_1, η', ζ' et ξ'_2, η', ζ' . Son potentiel est, comme on sait,

$$V = -\frac{S}{2} \log \left(\frac{r_2 + \xi'_2}{r_2 - \xi'_2} \cdot \frac{r_1 - \xi'_1}{r_1 + \xi'_1} \right),$$

d'où l'on tire :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 V}{\partial y'^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial x'^2} &= +S \left[\left(\frac{\eta'^2}{\eta'^2 + \zeta'^2} + 1 \right) \left(\frac{\xi'_1}{r_1^3} - \frac{\xi'_2}{r_2^3} \right) + \frac{\eta'^2 - \zeta'^2}{(\eta'^2 + \zeta'^2)^2} \left(\frac{\xi'_1}{r_1} - \frac{\xi'_2}{r_2} \right) \right], \\ \frac{\partial^2 V}{\partial x' \partial y'} &= -S\eta' \left[\frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{r_2^3} \right]. \end{aligned}$$

L'axe de la galerie est sensiblement au même niveau que l'appareil.

Comme la galerie est oblique par rapport au tunnel, il faut former les expressions rapportées à l'axe du tunnel comme axe des x .

Soit β l'angle dont il faut tourner dans le sens positif à partir de l'axe Ox du tunnel pour l'amener sur l'axe Ox' de la galerie transverse, on a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} &= \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y'^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial x'^2} \right) \cos 2\beta + 2 \frac{\partial^2 V}{\partial x' \partial y'} \sin 2\beta, \\ 2 \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} &= - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y'^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial x'^2} \right) \sin 2\beta + 2 \frac{\partial^2 V}{\partial x' \partial y'} \cos 2\beta. \end{aligned}$$

Ces galeries ont 2 m. 40 de largeur et 2 m. 20 de hauteur, sur 14 m. 50 de longueur; d'où :

$$S = 2,40 \times 2,20 = 5 \text{ mq. } 30.$$

⁽¹⁾ Pour cette observation, faite dans la seconde journée de travail, la distance de 20 mètres à partir de la chambre XVI le long du tunnel a été

seulement évaluée au pas, mais non mesurée; elle pouvait être en réalité un peu plus grande.

L'angle β est égal à $-52^{\circ}35'$, dans la partie Nord du tunnel, et à $+52^{\circ}35'$ dans la partie Sud, à l'exception de quelques régions où les difficultés du travail ont obligé à percer des galeries transverses supplémentaires d'obliquité opposée. Ces deux régions sont naturellement celles des grandes sources chaudes, près de la chambre XI, et celle des puissantes sources froides, près de la chambre XVI.

La chambre XI, bien que sur le versant Sud, a encore été atteinte par le chantier Nord. La galerie 53, à 41 mètres de la chambre, a l'obliquité du chantier Nord, $-52^{\circ}35'$. Elle produit un excès de courbure longitudinal égal à $-0,8.10^{-12}$ et un excès latéral $-0,2.10^{-12}$. Ce sont des actions négligeables.

Près de la chambre XVI, on a percé la galerie 21 (4,300 mètres à partir du Sud) avec l'obliquité $-52^{\circ}35'$; la galerie 21_A (4,400 mètres) avec l'obliquité $+52^{\circ}35'$; la galerie 21_B avec l'obliquité $-52^{\circ}35'$, immédiatement avant le terrain ébouleux, et les suivantes, 22, 23, ... à distance régulière. La galerie 21_B a été conservée; l'entrée de la galerie 21_A a été élargie et forme la petite chambre XVI, de dimensions et de construction régulière. Le reste de cette galerie a été remblayé et maçonné.

Dans la chambre XVI, l'action de la galerie 21_B est tout à fait négligeable [$-0,44.10^{-12}$ sur la courbure longitudinale, $-0,07.10^{-12}$ sur la courbure latérale].

Enfin, dans l'axe du tunnel, près de la chambre XVI, l'action de la galerie 21_B est encore négligeable, malgré la distance de 20 mètres seulement : $-0,4.10^{-12}$ sur la courbure longitudinale et $-0,6.10^{-12}$ sur la courbure latérale. *A fortiori*, la galerie 21_A, remblayée, n'y produit plus rien d'appréciable.

Galerie 21_A et Chambre XVI. — Il resterait à déterminer l'action de la galerie 21_A au centre de la chambre XVI; mais cela n'est malheureusement possible que d'une manière très grossière. Cette galerie, en effet, n'était pas prévue dans le projet primitif, et les entrepreneurs ont seulement été autorisés à la percer pour parer

aux difficultés provenant des sources, sous condition de la remplir ultérieurement de maçonnerie, ce qui a été fait jusqu'à environ 5 mètres du deuxième tunnel. On peut douter que la direction et les dimensions de cette galerie provisoire soient exactement les mêmes que celles des galeries prévues. En outre, une source abondante, qui débouchait à 2 ou 3 mètres du tunnel principal, est déviée jusqu'au tunnel II par un tuyau de fonte de 35 centimètres de diamètre environ noyé dans la maçonnerie. Enfin la position exacte de l'axe de la galerie par rapport à la chambre XVI, et les irrégularités de forme de l'excavation rocheuse à la rencontre de la galerie et de la chambre me sont inconnues. Comme l'axe de la galerie passe à 80 centimètres seulement de l'appareil, l'action est considérable et une erreur de 10 centimètres, qui n'aurait rien d'invraisemblable, a une influence encore considérable.

Pour la quantité $\frac{\partial^2 V}{\partial x' \partial y'}$, il n'y a pas de difficulté; en remplaçant la galerie par une seule ligne de densité linéaire $-S$, on obtient $+0,73$; en la remplaçant par 4 lignes de densité linéaire $-\frac{S}{4}$ parallèles à l'axe, suivant les 4 arêtes d'un prisme de côtés moitié de ceux de la galerie, on obtient $+0,71$; en outre, la forme du raccordement avec la chambre est sans influence notable.

Mais il en est autrement de la quantité $\frac{\partial^2 V}{\partial y'^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial x'^2}$. Une ligne de densité $-S$, terminée à la distance $\xi' = -1 \text{ m. } 40$, donne $+0,74$. Quatre lignes placées aux quatre arêtes du prisme de côté moitié, et s'arrêtant aussi à la distance $\xi' = -1,40$, donnent $+1,35$; si on donne à ces quatre lignes des longueurs différentes pour tenir compte de l'arrachement formé par l'angle de la chambre dans la galerie ($\xi' = -1,00$ pour deux d'entre elles et $\xi' = -1,80$ pour les deux autres), on trouve $+0,93$. Si, enfin, on traite la galerie comme un parallélépipède rectangle dont la base est à $-1 \text{ m. } 40$, on trouve $+2,1$ supérieur à $0,74$ et à $1,35$. On peut supposer, en raison du coin de la chambre, que la valeur réelle est un peu inférieure, comprise entre 1 et 1,5. Mais par suite de l'incertitude sur l'exacte position de l'axe de la galerie, et surtout des excès d'exca-

vation à la rencontre des deux cavités, je ne vois pas de moyen d'arriver à plus de précision.

En attribuant, comme on le verra plus loin, une densité 2,71 à la roche et une densité 2,65 à la maçonnerie, les évaluations qui précèdent donneraient les valeurs suivantes :

	1 LIGNE.	4 LIGNES INÉGALES.	4 LIGNES ÉGALES.	PRISME DROIT.
$10^{12} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \text{ longit.}$	- 6,6	- 6,7	- 7,2	- 8,0
$10^{12} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \text{ latéral}$	+ 1,4	+ 2,1	+ 3,8	+ 6,7

Enfin, la partie non maçonnée, au bout de la transverse 21, ajoute encore à la différence des courbures longitudinales, sensiblement - 21, et à la différence des courbures latérales, sensiblement + 16.

Usage de tous ces nombres. — Les résultats numériques qui précèdent permettent de calculer l'action locale due au tunnel, si l'on connaît la densité ρ de la roche dans la région avoisinante, la densité ρ_b du ballast, et celle ρ_c de la maçonnerie en ciment, dans les parties où le ciment a été employé au lieu de la pierre.

Les parties vides ont la densité $-\rho$, les parties ballastées la densité $\rho_b - \rho$, par rapport à la roche avoisinante, et les voûtes de ciment la densité $\rho_c - 2,65$, par rapport à la maçonnerie homogène de densité admise 2,65 qu'elles remplacent.

Petites chambres :

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 6,7 \cdot 10^{-8} \left[\begin{array}{l} -\rho [2,116 + 0,125 + 0,220 + 0,040 \\ \quad + 0,127] \\ + (\rho_b - \rho) [0,235 + 0,008 - 0,052] \\ + (\rho_c - 2,65) [-0,065] \end{array} \right]$$

ou

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = -6,7 \cdot 10^{-8} \left[2,819 \rho - 0,191 \rho_b - 0,065 (2,65 - \rho_c) \right].$$

Correction d'altitude du support :

$$+ 6,7 \cdot 10^{-8} [\rho (0,065 + 0,025 + 0,007) - (\rho_b - \rho) (0,017 - 0,004)] h$$

ou

$$+ 6,7 \cdot 10^{-8} [0,110 \rho - 0,013 \rho_b] h;$$

l'abaissement h est mesuré en décimètres.

Correction de maçonnerie homogène :

$$- 6,7 \cdot 10^{-8} (\rho - 2,65) (0,545 + 0,950)$$

ou

$$- 6,7 \cdot 10^{-8} (\rho - 2,65) 1,495.$$

Grandes chambres :

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 6,7 \cdot 10^{-8} \left[\begin{aligned} & -\rho [1,252 + 0,072 + 0,040 + 2,133 \\ & \quad + 0,056 + 0,166] \\ & + (\rho_b - \rho) [0,152 + 0,004 + 0,042] \\ & + (\rho_c - 2,65) [0,075 + 0,045] \end{aligned} \right]$$

ou

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = -6,7 \cdot 10^{-8} \left[3,915 \rho - 0,198 \rho_b + 0,120 (2,65 - \rho_c) \right].$$

Correction d'altitude :

$$+ 6,7 \cdot 10^{-8} [\rho (0,033 + 0,004 + 0,121 + 0,005) - (\rho_b - \rho) (0,005 - 0,005)] h$$

ou

$$+ 6,7 \cdot 10^{-8} \cdot \rho \cdot 0,163 \cdot h;$$

l'abaissement h est mesuré en décimètres.

Correction de maçonnerie homogène :

$$- 6,7 \cdot 10^{-8} [(\rho - 2,65)(0,342 + 0,075 - 1,388) + \rho \cdot 0,061]$$

ou

$$+ 6,7 \cdot 10^{-8} [(\rho - 2,65) 0,971 - 0,061 \rho].$$

Tunnel :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = & 6,7 \cdot 10^{-8} [(5,750 - 0,071) \rho - (\rho_b - \rho) 0,621 \\ & - (\rho_c - 2,65) 0,206] \end{aligned}$$

ou

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 6,7 \cdot 10^{-8} [6,300 \rho - 0,621 \rho_b + 0,206 (2,65 - \rho_c)].$$

Correction de maçonnerie homogène :

$$- 6,7 \cdot 10^{-8} (\rho - 2,65) 0,312.$$

Rayons de courbure. — Pour avoir la différence des courbures $\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}$, il faut multiplier les expressions précédentes par $\frac{1}{g}$ ou $\frac{1}{981}$, car on a, d'après les équations de la page 8, lorsque l'azimut α_1 du plan de la courbure 1, par rapport à l'axe des x est nul,

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{-g}{R_1}, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \frac{-g}{R_2},$$

d'où

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = g \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right).$$

Le facteur $6,7 \cdot 10^{-8}$ doit être remplacé par $68,3 \cdot 10^{-12}$.

Si au lieu de la constante de gravitation universelle de Poynting, $6,70 \cdot 10^{-8}$, nous adoptons celle de Boys, $6,66 \cdot 10^{-8}$, notre facteur serait réduit à $67,9 \cdot 10^{-12}$; il le serait plus encore, $67,4 \cdot 10^{-12}$, avec la constante de Cornu $6,61 \cdot 10^{-8}$.

En raison de cette incertitude assez étendue, j'adopterai dans les calculs qui suivent le nombre rond $68 \cdot 10^{-12}$, très voisin de celui qu'on déduirait des mesures de Boys.

Effectuons les multiplications en adoptant pour la densité du ballast :

$$\rho_b = 2,0.$$

Petites chambres :

$$10^{12} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = - \left\{ \begin{array}{l} 192 \rho - 26 - 4,4 (2,65 - \rho_c) + 102 (\rho - 2,65) \\ - (7,5 \rho - 1,8) h. \end{array} \right.$$

Grandes chambres :

$$10^{12} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = - \left\{ \begin{array}{l} 266 \rho - 27 + 8 (2,65 - \rho_c) + 4,15 \rho \\ - 66 (\rho - 2,65) - 11 \rho h. \end{array} \right.$$

Tunnel :

$$10^{12} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = + \left\{ \begin{array}{l} 428 \rho - 84 + 40 (2,65 - \rho_c) \\ - 21 (\rho - 2,65). \end{array} \right.$$

L'abaissement h est exprimé en décimètres. Le rayon de courbure R_1 est dans le plan vertical qui passe par l'axe du tunnel.

Dans les calculs qui suivent, la densité des moellons de ciment a été supposée égale à 2,2, lorsqu'il y a lieu.

Densité des roches. — La coupe géologique du Simplon représentée dans la planche V a été établie d'après les coupes publiées par M. Schardt en 1903 et 1906; mais je n'y ai reproduit que les résultats les plus directs de l'observation, c'est-à-dire ceux qui

donnent l'allure des couches près de la surface, et le long du tunnel, et j'ai effacé les raccordements hypothétiques de ces couches les unes aux autres, pour mieux mettre en évidence les seuls renseignements certains que nous ayons sur la distribution des densités. Les positions des chambres d'observations y sont marquées par les points régulièrement espacés et numérotés en chiffres romains à partir de l'extrémité Nord. Les points irrégulièrement distribués, numérotés en chiffres arabes, sont ceux pour lesquels la densité de la roche m'a été indiquée par la direction des Chemins de fer fédéraux; ces densités sont inscrites en dessous. Fort heureusement, beaucoup de ces points sont à distance assez petite des chambres où j'ai observé pour que l'incertitude sur la densité soit généralement faible, surtout en utilisant les renseignements géologiques détaillés que contiennent les bulletins trimestriels. Néanmoins, les plissements nombreux de densité très différente, auprès des chambres II et V, laissent subsister une trop grande incertitude sur la densité véritable dans une région de 20 à 30 mètres autour de ces chambres, et aussi au voisinage des puissantes sources froides du côté Sud, à la chambre XVI. Les densités que j'ai adoptées pour les chambres II, V, XII, XIII, XVI sont celles des morceaux de roche que j'ai détachés de la paroi du second tunnel, exactement en regard de la chambre correspondante. M. Schardt a bien voulu me communiquer⁽¹⁾ les résultats encore inédits de mesures effectuées pour d'autres points, plus nombreux, au laboratoire de pétrographie du Polytechnicum de Zurich. Ces résultats, généralement d'accord avec ceux que j'ai utilisés pour le calcul, présentent pourtant dans certaines régions des divergences notables; mais cela paraît tenir au choix qu'a fait M. Schardt d'échantillons minéralogiques aussi purs que possible, très différents, en certaines places, de la roche moyenne.

On trouvera le détail des renseignements pour chaque station dans la liste qui suit.

⁽¹⁾ 5 novembre 1907.

ELLIPTICITÉ DUE AUX ACTIONS LOCALES.

(TUNNEL, CHAMBRES, MAÇONNERIE, ETC.)

N. B. — Le premier chiffre donne l'influence des cavités et du ballast; le second, l'influence des voûtes lorsqu'elles sont en moellons de ciment au point d'observation; le troisième, l'influence de l'ensemble de la maçonnerie; le quatrième, la correction de hauteur du support; le cinquième, la correction due aux changements de construction à petite distance. L'incertitude indiquée est uniquement celle qui provient de la hauteur du support.

CHAMBRE I. — A 600 mètres de l'entrée Nord.

Profil 2.

A 500 mètres, schiste lustré $\rho = 2,830$.

Vers 700 mètres on commence à traverser une couche épaisse d'anhydrite.

$$10^{12} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = -[517 + 0 + 18 - 19h],$$

h était probablement égal ou supérieur à 1 décimètre.

$$10^{12} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = -516, \text{ incertitude } \pm 9.$$

A 565 mètres, la densité des schistes atteint 2,88 (Schardt). Si l'on adopte cette valeur il faut remplacer -516 par -531 .

CHAMBRE II. — A 1,600 mètres de l'entrée Nord.

Profil 2.

La voûte est en ciment jusqu'à 1,596 mètres et au delà de 1,612 mètres.

A 1,100 mètres, schiste lustré $\rho = 2,879$.

De 1,300 mètres à 1,590 mètres s'étend un banc de gypse vertical ($\rho = 2,9$).

On retrouve ensuite le schiste $\rho = 2,698$.

J'adopte $\rho = 2,76$ (mesure directe MB).

$$10^{12} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = -[504 + 0 + 13 - 18h - 2],$$

la proximité de la voûte en ciment conduit à retrancher un peu moins de 2.

h était inférieur à 0,5 (noté au niveau de la voie).

$$10^{12} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = -511, \text{ incertitude } \pm 9.$$

CHAMBRE IV. — A 3,600 mètres de l'entrée Nord.

Profil 2.

A 3,500 mètres, schistes lustrés calcarifères $\rho = 2,716$.

Au delà de 3,700 mètres, on pénètre dans le gypse.

$\rho = 2,72$.

$$10^{12} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = -[496 + 0 + 9 - 18h],$$

h était inférieur à 0,5 (noté au niveau de la voie).

$$10^{12} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = -496, \text{ incertitude } \pm 9.$$

CHAMBRE V. — A 4,600 mètres de l'entrée Nord.

Profil 2, avec voûte en ciment.

De 4,410 mètres à 4,693 mètres, les plis sont nombreux; on rencontre des alternances de calcaire siliceux micacé, de calcaire

cipolin et de micaschistes gris, blancs, chloriteux, amphiboliques, très froissés.

A 4,300 mètres, la densité dans le micaschiste est 2,723; à 5,600 mètres, dans le gneiss, 2,612.

J'adopte 2,70 (mesure directe MB).

$$10^{12} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = -[492 - 2 + 7 - 18h],$$

h était égal à 2, le sol en ciment étant nu.

J'admets une incertitude de 2 centimètres.

$$10^{12} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = -461, \text{ incertitude } \pm 4.$$

CHAMBRE VI. — A 5,600 mètres de l'entrée Nord.

Profil 2, avec voûte en ciment.

A 5,600 mètres, gneiss de densité 2,612.

$\rho = 2,61$.

$$10^{12} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = -[475 - 2 - 2 - 17h],$$

h était probablement inférieur à 1, l'état du sol n'ayant pas été noté.

$$10^{12} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = -454, \text{ incertitude } \pm 9.$$

CHAMBRE VII. — A 6,600 mètres de l'entrée Nord.

Profil 2.

Jusqu'à 6,570 mètres, et au delà de 6,610 mètres, la voûte est en ciment.

A 6,550 mètres, gneiss de densité 2,781.

$\rho = 2,78$.

$$10^{12} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = -[507 + 0 + 15 - 19h - 1],$$

La proximité de la voûte de ciment introduit le dernier terme — 1.

h était compris entre 1,5 et 2; je prends 1,7.

$$10^{12} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = -488, \text{ incertitude } \pm 9.$$

Dans cette région les variations de la densité sont considérables; on trouve à 6,552 mètres une intercalation d'amphibolite de 6 ou 7 mètres d'épaisseur, dont la densité atteint 3,15 d'après M. Schardt.

GRANDE CHAMBRE VIII. — A 7,600 mètres de l'entrée Nord.

Profil 2, avec voûte en ciment.

Au delà de 7,618 mètres, la voûte cesse d'être en ciment.

On sort du micaschiste calcarifère ($\rho = 2,76$) à 6,100 mètres environ pour y rentrer vers 7,100 mètres.

A 7,790 mètres, on est dans le gneiss de densité 2,604.

J'adopte $\rho = 2,60$,

$$10^{12} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = -[665 + 4 + 13 + 3 - 29h],$$

Peut-être la correction +4 pour la construction de ciment pourrait-elle être diminuée de près de 1, par suite de la reprise de la voûte de pierre à 18 mètres de distance.

h était inférieur à 0,5 (noté au niveau de la voie).

$$10^{12} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = -670, \text{ incertitude } \pm 15.$$

A 7,700 mètres, la densité est 2,67 (Schardt); si on adoptait cette valeur, le nombre — 670 devrait être remplacé par — 690.

CHAMBRE XI. — A 10,353 mètres de l'entrée Nord.

Profil 2, avec voûte en ciment.

Au delà de 10,374 mètres, la voûte cesse d'être en ciment.

En venant du Nord, on rencontre un banc épais de micaschiste et d'anhydrite qui plonge depuis le lac d'Avino. On entre ensuite dans le calcaire.

A 9,800 mètres, calcaire de densité 2,683.

A 10,000 mètres, calcaire quartzitique de densité 2,668.

A 10,144 mètres jaillissent les puissantes sources chaudes, à travers un calcaire très fissuré. La chambre est précisément dans cette région difficile.

A 10,650 mètres, une faille accompagnée d'un rejet de 3 mètres, toujours dans le calcaire, laisse surgir de l'eau chaude; il y a de nombreuses surfaces de glissement.

J'adopte $\rho = 2,67$.

$$10^{12} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = -[486 - 2 + 2 - 18h],$$

h était égal à 2. — Le sol en ciment était nu.

$$10^{12} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = -450, \text{ incertitude } \pm 4.$$

La galerie transverse augmente cette valeur de — 0,8 et produit une action latérale — 0,2, négligeable.

CHAMBRE XII. — A 11,375 mètres de l'entrée Nord.

Profil 2_c, avec radier en ciment de 0 m. 40.

Depuis 11,200 mètres on trouve des micaschistes calcaires, gris avec grenats, avec intercalations de calcaires sans grenats dans la région de la chambre XII.

A 12,000 mètres, dans le micaschiste granatifère, la densité est 2,742. Dans le calcaire, la densité était 2,668.

J'adopte $\rho = 2,77$ (mesure directe MB).

$$10^{12} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = -[504 + 0 + 12 - 18h],$$

h était compris entre 1 et 1,5.

$$10^{12} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = -498, \text{ incertitude } \pm 9.$$

GRANDE CHAMBRE XIII. — A 12,377 mètres de l'entrée Nord.
Profil 2.

A 12,000 mètres, micaschiste granatifère de densité 2,742.

A 12,400 mètres, gneiss riche en mica, de densité 2,696.

J'adopte 2,77 (mesure directe MB).

$$10^{12} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = -[721 + 0 + 3 - 30h],$$

h était probablement inférieur à 0,5 (non noté).

$$10^{12} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = -709, \text{ incertitude } \pm 15.$$

CHAMBRE XIV. — A 13,372 mètres de l'entrée Nord.
Profil 2.

A 13,388 mètres, micaschiste de densité 2,619.

$$10^{12} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = -[477 + 0 + 3 - 18h],$$

h était compris entre 1,5 et 2 (très peu de ballast).

$$10^{12} \left(\frac{2}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = -447, \text{ incertitude } \pm 9.$$

CHAMBRE XV. — A 14,372 mètres de l'entrée Nord.

Profil 2.

A 14,458 mètres, micaschiste calcarifère de densité 2,692.

$$10^{12} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = -[489 + 0 + 4 - 19h],$$

h était inférieur à 0,5 (noté au niveau de la voie).

$$10^{12} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = -484, \text{ incertitude } \pm 9.$$

AXE DU TUNNEL. — A 15,368 mètres de l'entrée Nord.

Profil 2.

Depuis 15,218 mètres jusqu'à 15,338 mètres, on a dû employer toute une série de profils spéciaux, extrêmement résistants, en raison des puissantes sources froides et de la mauvaise tenue de la roche. A cause de la distance, supérieure à 30 mètres, cette variété de maçonnerie n'a aucune action appréciable.

Densité adoptée 2,71 (voir chambre XVI).

$$10^{12} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = +[1076 + 0 - 1].$$

Le ballastage étant complet dans le tunnel et la voie en place, il n'y a pas lieu de faire une correction d'altitude; mais une erreur

de 5 centimètres peut bien subsister, et l'incertitude résultante est près d'un centième.

$$10^{12} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = +1075, \text{ incertitude } \pm 10.$$

L'effet de la galerie 21_n est négligeable.

CHAMBRE XVI. — A 15,388 mètres de l'entrée Nord.

Profil 2.

A 15,088 mètres, anhydrite de densité 2,887.

A 15,357 mètres, marbre de densité 2,701.

Vers 15,369 mètres, faille; roche en bouillie.

A 15,463 mètres, calcaire cipolin.

J'adopte la densité 2,71 (mesure directe MB).

$$10^{12} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = -[493 + 0 + 6 - 19h],$$

h était probablement peu différent de 1. (le ballast avait été étalé).

$$10^{12} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = -480, \text{ incertitude } \pm 9.$$

La galerie transverse 21_n n'a qu'une action négligeable, mais la galerie 21_A, située derrière la chambre même, produit une action longitudinale comprise entre -27 et -30 et une action latérale comprise entre $+17$ et $+25$ si elle est remblayée en maçonnerie de densité 2,65, jusqu'à 4 mètres environ du deuxième tunnel.

AXE DU TUNNEL. — A 16,346 mètres de l'entrée Nord.

Profil 2.

Densité 2,62.

$$10^{12} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = +1037 + 0 + 1.$$

Même incertitude relative que dans l'autre station du tunnel.

$$10^{12} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = +1038, \text{ incertitude } \pm 10.$$

CHAMBRE XVII. — A 16,366 mètres de l'entrée Nord.

Profil 2.

A 15,958 mètres, gneiss d'Antigorio de densité 2,608.

A 16,873 mètres, gneiss d'Antigorio de densité 2,629.

J'adopte $\rho = 2,62$.

$$10^{12} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = -[477 + 0 - 3 - 18h],$$

h était probablement compris entre 1 et 1,5.

$$10^{12} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = -447, \text{ incertitude } \pm 9.$$

GRANDE CHAMBRE XVIII. — A 17,373 mètres de l'entrée Nord.

Profil 2.

A 16,873 mètres, gneiss d'Antigorio, de densité 2,629.

A 17,871 mètres, gneiss d'Antigorio, de densité 2,659.

J'adopte $\rho = 2,65$.

$$10^{12} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = -[679 + 0 + 11 - 29h],$$

h a été noté, comme compris entre 1,5 et 2.

$$10^{12} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = -646, \text{ incertitude } \pm 15.$$

Ellipticité due aux actions locales. — Je rappelle que je désigne sous le nom d'actions locales les actions dues au tunnel et à toutes les irrégularités de structure qui en proviennent : niches, chambres, ballast, maçonnerie, voûtes en ciment, radiers bétonnés, etc. Le calcul de ces actions a été difficile à faire de façon certaine pour diverses raisons; la plus grave est l'incertitude sur la position de l'appareil, surtout en hauteur au-dessus du sol; c'est la seule que j'aie laissée en évidence dans le tableau qui suit. Les autres causes d'incertitude sont, par ordre d'importance, l'ignorance relative à la densité de la roche, dans le voisinage immédiat de chaque station; l'ignorance de la densité exacte des matériaux de construction; l'ignorance de la forme et de l'aire exacte de l'excavation. Ces diverses causes d'incertitude sont en général beaucoup moins graves que la première; l'erreur relative à la densité ne dépasse probablement pas $\frac{1}{250}$, c'est-à-dire trois unités dans les petites chambres, trois dans les grandes chambres, quatre dans l'axe du tunnel, à l'exception de la chambre XVI.

Si l'on avait prévu l'utilisation du tunnel pour de telles mesures au moment de sa construction, rien n'aurait été plus facile que de rassembler au moment même de la construction les renseignements nécessaires avec toute la précision désirable; cela paraît un peu plus difficile après la construction achevée.

Quant à l'incertitude de position de l'appareil, il n'y aurait qu'un moyen de la lever, c'est de recommencer les mesures.

TABLEAU VIII.

ELLIPTICITÉ DUE AUX ACTIONS LOCALES (CALCULÉE).

	DISTANCE EN MÈTRES.	$10^{12} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = \mathfrak{B}'_c$	INCERTITUDE.
Ch. I.....	600	— 516	± 9
II.....	1600	— 511	± 9
IV.....	3600	— 496	± 9
V.....	4600	— 461	± 4
VI.....	5600	— 454	± 9
VII.....	6600	— 488	± 9
G. Ch. VIII.....	7600	— 670	± 15
Ch. XI.....	10353	— 450	± 4
XII.....	11375	— 498	± 9
G. Ch. XIII.....	12377	— 709	± 15
Ch. XIV.....	13372	— 447	± 9
Ch. XV.....	14372	— 484	± 9
Voie XVI.....	15368	+ 1075	± 10
Ch. XVI.....	15388	— 508	± 12
Voie XVII.....	16346	+ 1038	± 10
Ch. XVII.....	16366	— 447	± 9
G. Ch. XVIII.....	17373	— 646	± 15

L'incertitude est celle qui provient de la hauteur insuffisamment mesurée du trépied.

A la chambre XVI il reste encore à faire une correction de -7 à -15 (et latéralement une action de $+8$ à $+16$) suivant la densité du remblayage de la galerie 21.

Actions lointaines. — Rapprochons maintenant les résultats de l'observation de ceux du calcul des actions locales. Nous avons inscrit à la fin du chapitre XI, p. 170, les valeurs observées de l'ellipticité dans le tunnel tel qu'il est :

$$\mathfrak{B}' = \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \sin 2 (\alpha_i - \alpha_1),$$

$$\mathfrak{B}' = \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \cos 2 (\alpha_i - \alpha_1).$$

Le calcul nous donne, pour les actions locales, un terme \mathfrak{A}'_c , nul par symétrie, et les \mathfrak{B}'_c du tableau qui précède.

L'ellipticité du géoïde telle qu'on l'aurait mesurée dans les cavités sphériques occupant la même position que les stations est donc définie par \mathfrak{A}' et $\mathfrak{B}' - \mathfrak{B}'_c$. C'est l'ellipticité du géoïde tel qu'il serait si on n'avait pas percé le tunnel, mais avec la répartition des masses internes de la montagne telle qu'elle était au moment de l'observation, eu égard au changement de régime des eaux souterraines et aux effondrements ou affaissements de roches broyées qui ont pu se produire dans certaines régions.

TABLEAU IX.

ELLIPTICITÉ OBSERVÉE, CORRIGÉE DES ACTIONS LOCALES.

	$\mathfrak{A}'' = \mathfrak{A}'_{\text{obs.}}$	$\mathfrak{B}'' = \mathfrak{B}'_{\text{obs.}} - \mathfrak{B}'_{\text{calc.}}$
Ch. I.	— 78	— 32 (± 9)
II.	+ 7	+ 1 (± 9)
IV.	+ 12	+ 221 (± 9)
V.	+ 169	+ 163 (± 4)
VI.	+ 279 ± 5	+ 210 ($\pm 4 \pm 9$)
VII.	+ 139	+ 255 (± 9)
G. Ch. VIII.	+ 99	+ 205 (± 15)
Ch. XI.	+ 129	+ 144 (± 4)
XII.	+ 51	+ 270 (± 9)
G. Ch. XIII.	— 15	+ 40 (± 15)
Ch. XIV.	+ 8	+ 122 ($\pm 6 \pm 9$)
Ch. XV.	+ 34	+ 63 (± 9)
Voie XVI.	— 65 (± 16)	— 17 (± 10)
Ch. XVI.	— 47 (— 17 à 25)	— 32 (+ 12)
Voie XVII.	— 85	+ 88 ($\pm 14 \pm 10$)
Ch. XVII.	— 105 (± 6)	+ 92 ($\pm 12 \pm 9$)
G. Ch. XVIII.	— 28	— 70 ($\pm 12 \pm 15$)

J'ai mis entre parenthèses l'incertitude qui résulte tant des observations mêmes que du calcul des actions locales.

Pour la chambre XVI, la valeur de \mathfrak{B}'' est comprise entre -64 et $+72$ suivant l'importance de l'action de la transverse 21_A .

Ces valeurs sont représentées dans la figure 14.

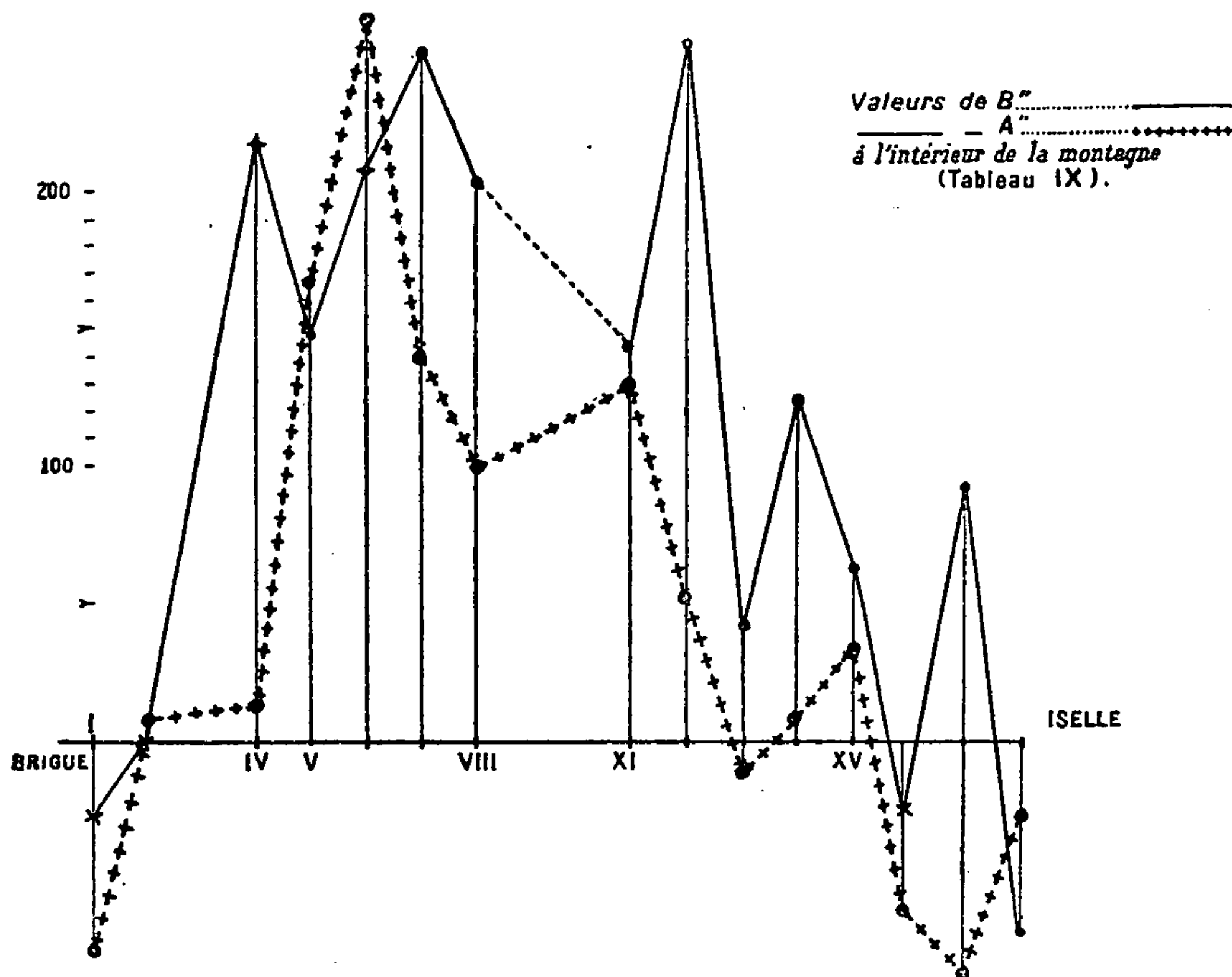


Fig. 14.

Malgré l'énorme différence des actions locales, les deux observations dans la chambre XVII et sur la voie donnent des valeurs identiques pour \mathfrak{B}'' ($+88$ et $+92$). Les valeurs de \mathfrak{B}' , qui devraient être identiques, diffèrent davantage, mais la différence est explicable par les mauvaises conditions expérimentales sur la voie (p. 138).

Au kilomètre XVI, l'écart des valeurs de \mathfrak{B}' est négligeable et de sens incertain; l'écart des valeurs de \mathfrak{B}'' est plus grand, mais il suffirait, pour le faire disparaître, de supposer que le remblai de la galerie transverse 21_A a une densité un peu moindre 2,60 ou 2,55 au milieu d'une roche de densité 2,71.

Sans qu'il soit possible d'être tout à fait affirmatif, faute de documents assez précis sur la construction du tunnel dans le voisinage des sources froides, il semble bien que les actions locales suffisent à faire disparaître toute différence entre l'ellipticité dans la chambre XVI et l'ellipticité sur la voie, et qu'il ne subsiste aucun résidu certain à attribuer au défaut de densité et peut-être à quelque cavité dans la couche ébouleuse d'où sortent ces sources froides.

Ainsi, l'écart des observations brutes au kilomètre XVI dans la chambre et sur la voie (p. 167 et 168) était bien dû à une grosse perturbation locale; mais au lieu d'être d'origine géologique, comme je l'avais d'abord espéré, cet écart paraît bien provenir uniquement d'une particularité de construction dont je n'ai eu connaissance qu'en dépouillant les bulletins de l'entreprise, plusieurs mois après l'impression de la première partie de ce mémoire, et sur laquelle je n'ai eu de renseignements à peu près complets qu'en août 1907.

Différence des courbures principales et azimuth du plus petit rayon de courbure R_1 . — Les valeurs de \mathcal{A}'' et \mathcal{B}'' données dans le tableau IX sont liées à la différence des courbures principales et à l'azimut du plus petit rayon par les relations

$$\mathcal{A}'' = \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \sin 2 (\alpha_t - \alpha_1''),$$

$$\mathcal{B}'' = \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \cos 2 (\alpha_t - \alpha_1''),$$

d'où l'on déduit :

$$\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} = \pm \sqrt{\mathcal{A}''^2 + \mathcal{B}''^2}$$

et

$$\operatorname{tg} 2 (\alpha_1'' - \alpha_t) = - \frac{\mathcal{A}''}{\mathcal{B}''}.$$

La tangente laisse le choix entre les deux azimuts de R_1 et de R_2 ,

à 90 degrés l'un de l'autre; on fixe son choix sur α_1'' au moyen du signe de \mathcal{A}'' . C'est ce que résume le tableau suivant.

\mathcal{A}'' .	\mathcal{B}'' .	$\alpha'' - \alpha_1$.
+	—	— 90° à — 45°
+	+	— 45° à 0
—	+	0 à + 45°
—	—	+ 45° à + 90°

Ces azimuts sont positifs à droite du tunnel en regardant vers Brigue, c'est-à-dire en tournant du Nord-Ouest au Nord.

Quelque considérable que soit l'incertitude — surtout aux chambres II et XIII, où l'ellipticité est faible — la marche générale est bien visible et correspond bien, qualitativement, à ce qu'on peut attendre de la distribution des sommets et des vallées.

TABLEAU X.

DIFFÉRENCE DES COURBURES PRINCIPALES ET AZIMUT DU PLUS PETIT RAYON
(CORRIGÉS DE TOUTES LES ACTIONS LOCALES).

	$10^{12} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$.	$\alpha_1'' - \alpha_1$.
Ch. I.....	84 (± 9)	+ 56° 0
Ch. II.....	7 (± 9)	— 41° 0
Ch. IV.....	222 (± 9)	— 1° 5
Ch. V.....	235 (± 4)	— 23° 0
Ch. VI.....	349 (± 13)	— 26° 5
Ch. VII.....	291 (± 9)	— 14° 2
G. Ch. VIII.....	228 (± 15)	— 12° 8
Ch. XI.....	193 (± 4)	— 20° 8
Ch. XII.....	275 (± 9)	— 5° 3
G. Ch. XIII.....	43 (± 15)	+ 10° 2
Ch. XIV.....	123 (± 15)	— 2° 0
Ch. XV.....	72 (± 9)	— 14° 0
Voie XVI.....	67 (± 26)	+ 52° 3
Ch. XVI.....	74 (± 15)	+ 57° 8
Voie XVII.....	122 (± 24)	+ 22° 0
Ch. XVII.....	140 (± 27)	+ 24° 4
G. Ch. XVIII.....	75 (± 27)	+ 79° 0

Comme au chapitre précédent, je donne dans le tableau XI les valeurs des deux rayons de courbure dans la masse même de la montagne, en supposant que la somme des courbures soit constante et égale à celle de l'ellipsoïde de Bessel sur toute la longueur du tunnel : $3,135.10^{-12}$. La plus grande différence se trouve dans la moitié Nord du tunnel, dans la chambre VI, à 5,600 mètres de l'entrée Nord : 5,750 kilomètres et 7,210 kilomètres.

TABLEAU XI.

LES DEUX RAYONS DE COURBURE PRINCIPAUX DE LA TERRE
DANS L'INTÉRIEUR DE LA MONTAGNE LE LONG DE L'AXE DU TUNNEL.

	R_1 EN KILOMÈTRES.	R_2 EN KILOMÈTRES.	AZIMUT DE R_1 .
Ch. I.....	6210	6560	+ 56°
Ch. II.....	6360	6400	— 41°
Ch. IV.....	5950	6870	— 1°
Ch. V.....	5940	6890	— 23°
Ch. VI.....	5730	7170	— 27°
Ch. VII.....	5840	7030	— 14°
G. Ch. VIII.....	5950	6870	— 13°
Ch. XI.....	6010	6800	— 21°
Ch. XII.....	5860	6990	— 5°
G. Ch. XIII.....	6290	6470	+ 10°
Ch. XIV.....	6140	6640	— 2°
Ch. XV.....	6220	6530	— 14°
Voie XVI.....	6250	6520	+ 52°
Ch. XVI.....	6240	6540	+ 58°
Voie XVII.....	6140	6640	+ 22°
Ch. XVII.....	6110	6680	+ 24°
G. Ch. XVIII.....	6230	6540	+ 79°

Les mêmes données et la même supposition peuvent encore être mises en œuvre sous une forme un peu différente. La somme des courbures dans deux sections rectangulaires étant indépendante de leur azimut, nous pouvons aussi bien calculer le rayon de courbure suivant l'axe du tunnel, et le rayon de courbure normal à l'axe,

dans l'intérieur de la montagne. Ces deux rayons ne sont plus le rayon minimum et le rayon maximum, mais leur relation avec le tunnel est un peu plus claire. L'azimut du rayon minimum complète la définition. Ces valeurs sont résumées dans le tableau XII, calculé au moyen des formules suivantes :

$$\frac{1}{R_{\text{long}}} + \frac{1}{R_{\text{transv}}} = 3135.$$

$$\frac{1}{R_{\text{long}}} - \frac{1}{R_{\text{transv}}} = 05''. \quad (\text{Tableau IX}).$$

A la chambre XVI, l'incertitude porte surtout sur l'azimut.

Là où les deux courbures sont peu différentes, l'incertitude sur l'azimut peut atteindre plusieurs degrés.

TABLEAU XII.

RAYONS DE COURBURE LONGITUDINAL ET TRANSVERSAL,
LE LONG DE L'AXE DU TUNNEL.

	R_{long}	R_{transv}	AZIMUT DU RAYON MINIMUM.
Ch. I.....	6450	6310	+ 56°
Ch. II.....	6380	6380	— 41°
Ch. IV.....	5950	6870	— 1°
Ch. V.....	6060	6730	— 23°
Ch. VI.....	5970	6840	— 27°
Ch. VII.....	5900	6940	— 14°
G. Ch. VIII.....	5990	6820	— 13°
Ch. XI.....	6100	6690	— 21°
Ch. XII.....	5870	6980	— 5°
G. Ch. XIII.....	6300	6460	+ 10°
Ch. XIV.....	6140	6640	— 2°
Ch. XV.....	6250	6510	— 14°
Voie XVI.....	6410	6340	+ 52°
Ch. XVI.....	6440	6310	+ 58°
Voie XVII.....	6210	6560	+ 22°
Ch. XVII.....	6200	6570	+ 24°
G. Ch. XVIII.....	6530	6240	+ 79°

En parcourant la colonne des rayons de courbure longitudinaux, comme d'ailleurs les valeurs de ϑ'' du tableau IX, on reconnaît que, le long de l'axe du tunnel, le géoïde est très ondulé

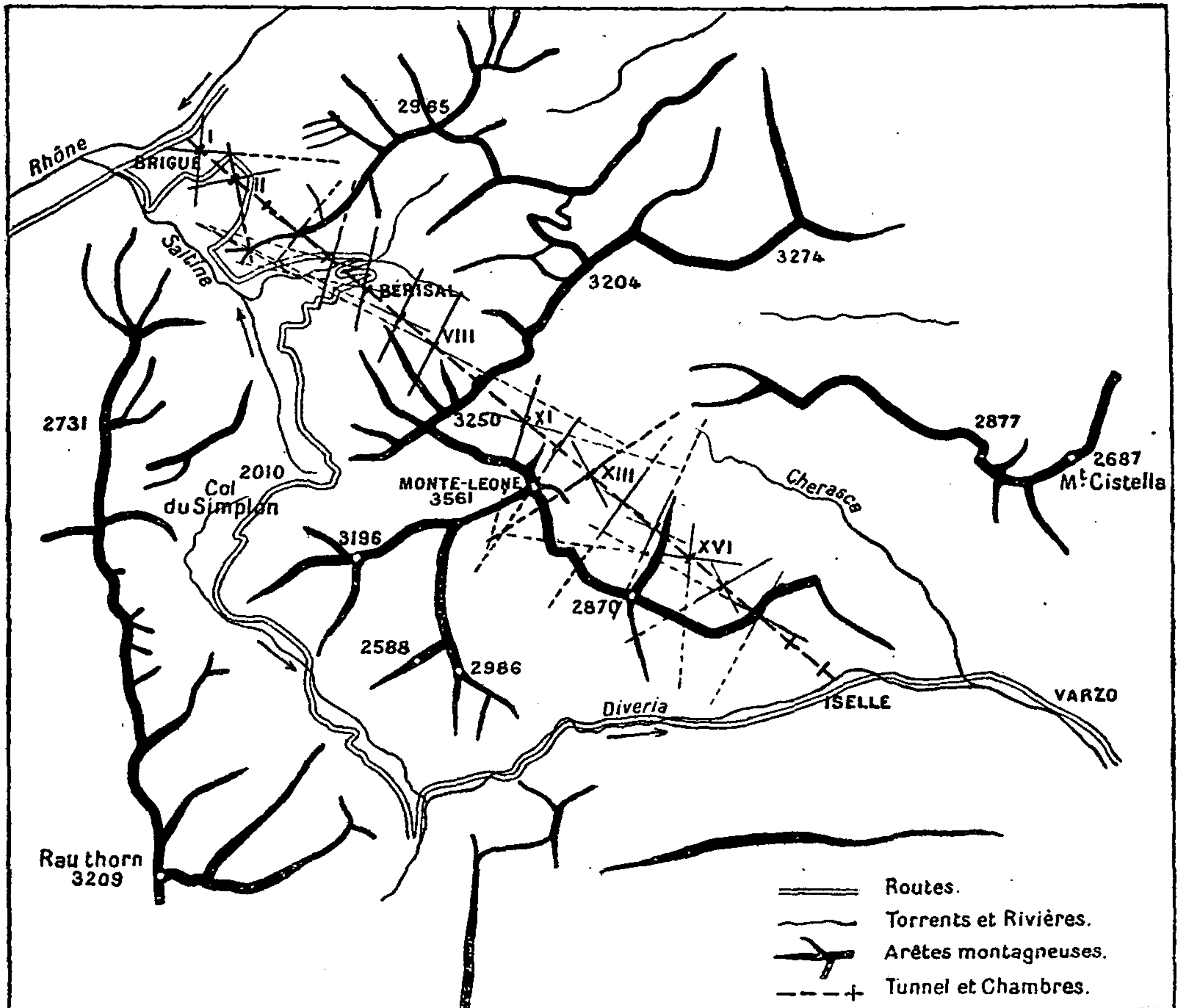


Fig. 15.

Les traits forts indiquent la direction des excès de masse. — Les traits déliés indiquent la direction des défauts de masse. — L'azimut des traits déliés compté de gauche à droite à partir du tunnel est celui des tableaux X, XI, XII.

(fig. 14). Peut-être serait-on tenté d'attribuer ces nombreuses ondulations à des erreurs de mesure ou de correction des actions locales; je crois qu'on se tromperait complètement et que les écarts

dépassent de beaucoup les erreurs possibles des mesures, que je n'ai dissimulées nulle part. D'ailleurs, on peut remarquer que le relief général de la montagne, tel qu'il est figuré sur la coupe géologique (pl. V) présente d'aussi nombreuses ondulations; je me contenterai d'indiquer quelques rapprochements (fig. 15). La chambre IV est au-dessous d'une première crête de 1,800 mètres; qui se termine à 2 kilomètres au S.-O. et à 1 kilomètre au S.-E. dans la vallée de la Saltine, au-dessus de laquelle se trouve la chambre V. La route du col, après avoir contourné l'arête précédente et passé au-dessus de la chambre V et à Bérisal, est rejetée vers le S.-O. par la masse du Monte Leone. L'arête de 3,000 mètres, qui marque la frontière italo-suisse, passe du N.-E. au S.-O. à peu près au-dessus de la station centrale du tunnel. Au S.-E. des chambres IX à XV se trouve la masse glacée du Monte Leone, haute de 3,000 à 3,500 mètres, que contourne à 7 kilomètres au S.-O. la route du col du Simplon. Du massif se détache une arête qui vient recouper le tunnel au-dessus de la chambre XVIII et qui sépare le profond ravin de Gondo, suivi par la route du col au Sud, de la gorge de la Cherasca au Nord, qui descend du N.-O. au S.-E. Un peu au Nord de la chambre XI, la frontière italo-suisse est bordée par un autre vallon O.-E., séparé de la Cherasca par une arête qui se relève vers l'Est et aboutit au mont Cistella. Ces massifs, ces arêtes, ces vallons d'orientations diverses suffisent amplement à expliquer les variations de l'ellipticité observées en se rappelant la règle qualitative suivante.

La valeur de ψ'' dépend de l'excès des masses situées à droite et à gauche du tunnel sur celles situées en avant et en arrière.

La valeur de α'' dépend de l'excès des masses situées à l'Est et à l'Ouest de la station sur celles situées au Nord et au Sud.

Les masses actives sont surtout celles dont le niveau diffère le moins de celui de l'appareil.

Sur le croquis géographique, les directions des excès de masse résultante en chaque station ont été tracées en trait fort et celles des déficits résultants (α_1'') en traits déliés. Ces tracés montrent

que, dans la moitié Nord, l'ellipticité est commandée surtout par les déficits concordants de la vallée du Rhône, du ravin de la Saline et de la Cherasca, tandis que, dans la moitié Sud, c'est l'énorme excès de masse du Monte Leone qui donne l'orientation générale, un peu troublée par les ravins de la Diveria et de la Cherasca.

CONCLUSION. — Je terminerai ici ce mémoire. Les derniers tableaux donnent l'ellipticité du géoïde tel qu'il serait le long de l'axe du tunnel si celui-ci n'existait pas.

Ces résultats une fois obtenus, il reste à savoir quels renseignements ils fournissent au sujet de la constitution de la montagne; pour cela, il faut calculer l'action de la montagne telle qu'elle est définie par les excellentes cartes au cent-millième du Service géographique suisse. Mais si l'on songe qu'il y a dix-sept stations et deux nombres à calculer en chacune d'elles, et que pour chacune de ces trente-quatre valeurs il faut étendre le calcul à un rayon de 8 ou 10 kilomètres, on comprendra que je réserve pour un mémoire ultérieur tout ce calcul, ainsi que la discussion des meilleurs moyens d'utiliser ces données pour la recherche des masses agissantes, ou même plus simplement pour la représentation d'une bande du géoïde au voisinage de la ligne d'observations.

Tout l'appareil a été construit sous ma direction, chez M. Pellin, à l'exception des spaths qui ont été taillés chez M. Jobin.

APPENDICE.

Les 16 et 17 août 1907, j'ai recueilli des échantillons de pierre de construction et de roches du tunnel avec l'aide de M. Rossi, ingénieur du tunnel à Iselle, qui avait surveillé les travaux de l'entreprise et connaissait tous les détails de la construction. C'est à lui que je dois à peu près tous les renseignements complémentaires qui m'ont été nécessaires pour les calculs, et les indications précises sur presque tout le tunnel. M. Brou, ingénieur en chef, m'a guidé aux carrières de la Massa (côté Nord) et m'a très complaisamment communiqué toutes les indications qui pouvaient m'être utiles dans les archives de la construction. C'est un plaisir pour moi d'adresser à M. Brou et à M. Rossi tous mes remerciements.

CARRIÈRES. — *Nord*. La carrière de la Massa est située sur la rive droite du Rhône, environ 2 kilomètres en amont de Brigue, à l'issue du torrent de la Massa, profondément encaissé entre parois rocheuses. Ce sont les gneiss qui forment la paroi gauche du torrent que l'on a exploités pour la construction de toute la moitié nord du tunnel. Parmi les blocs et les débris qui restent abandonnés, j'ai pris trois morceaux différents.

Sud. Les pierres de construction du côté Sud sont d'origine plus variée. Les diverses carrières se rencontrent dans l'ordre suivant, en remontant le cours de la Diveria, de l'Est à l'Ouest.

Balmanolesca. — Sur la rive gauche de la Diveria, un peu en aval du village de Nante. C'est un énorme éboulis de roches tombées de la paroi élevée au-dessus de laquelle se trouve le village de Trasquera. Ces pierres ont fourni des moellons (pierre n° VII).

Carrière vis-à-vis l'ascenseur. — Cette carrière située sur la rive droite, en face de la station d'Iselle, est taillée en plein roc; elle a fourni presque tous les parements de la moitié Sud du tunnel (pierre n° III).

Un éboulement en face de la gare, quelques mètres à l'Ouest de la carrière, sur la rive droite, a fourni presque toute la pierre de remplissage de la maçonnerie — gneiss mêlé de quartz — (pierre n° II).

Toujours sur la rive droite, en face de l'entrée de la galerie de direction Sud, la Carrière des Bains, sous le filtre, a fourni de nombreux parements et des moellons (pierre n° I).

Deux kilomètres plus loin environ, sur la rive gauche, un peu avant le 5^e torrent depuis le village d'Iselle, est la carrière de Sassomare-Balmare, dont les pierres très dures, mêlées de quartz, ont fourni des moellons pour les deux derniers kilomètres construits au Sud (kilom. 7 à 9 d'Iselle) [pierre n° VI]. Enfin, au delà de ce 5^e torrent, est la carrière de Sassomare, dans le haut de laquelle ont été prises les pierres du portail Sud (pierre n° V).

Ciment. — Il reste à Iselle et à Brigue des tas de moellons de ciment inutilisés, dans lesquels j'ai pris des morceaux détachés d'un moellon en bon état.

Roches du tunnel. — Les roches ont été détachées de la paroi de la seconde galerie en face des chambres d'observation. Les distances qui sont marquées à la peinture le long de la paroi de cette seconde galerie rendent le repérage facile. Je l'ai parcourue d'Iselle à Brigue.

En face de la chambre XVI. L'aspect de la roche change à petite distance; un morceau (XVI₁) a été pris en regard de la chambre; un autre morceau (XVI₂) un peu plus loin.

A la chambre XIII, la roche est toute feuilletée par des lames de quartz blanc.

Aux approches de la chambre XII, le 2^e tunnel est maçonné; le morceau XII a été pris à 8,353 mètres environ, juste avant la maçonnerie.

Dans la région de la chambre V, la roche est pourrie et s'émiette.

Près de la chambre II, le 2^e tunnel est maçonné (de 1,620 à 1,580 mètres). J'ai pris deux morceaux de roche de part et

d'autre; c'est un schiste micacé mou, mêlé de très nombreuses veines de quartz.

DENSITÉS. — Les densités ont été mesurées par la balance hydrostatique, sur la roche séchée à l'air libre et sur la roche mouillée par immersion dans l'eau pendant 24 heures. Température 14° environ. Les morceaux de roche pèsent de 400 à 1,800 grammes.

CARRIÈRES SUD.

	DENSITÉ.	
	PIERRE SÈCHE.	PIERRE HUMIDE.
I.....	2,67	2,66
II.....	2,74	2,74
III.....	2,63	2,63
V.....	2,65	2,64
VI.....	2,645	2,645
VII.....	2,63	2,63

CARRIÈRE DE LA MASSA.

Massa (1).....	2,68	2,63
Massa (2).....	2,65	2,64

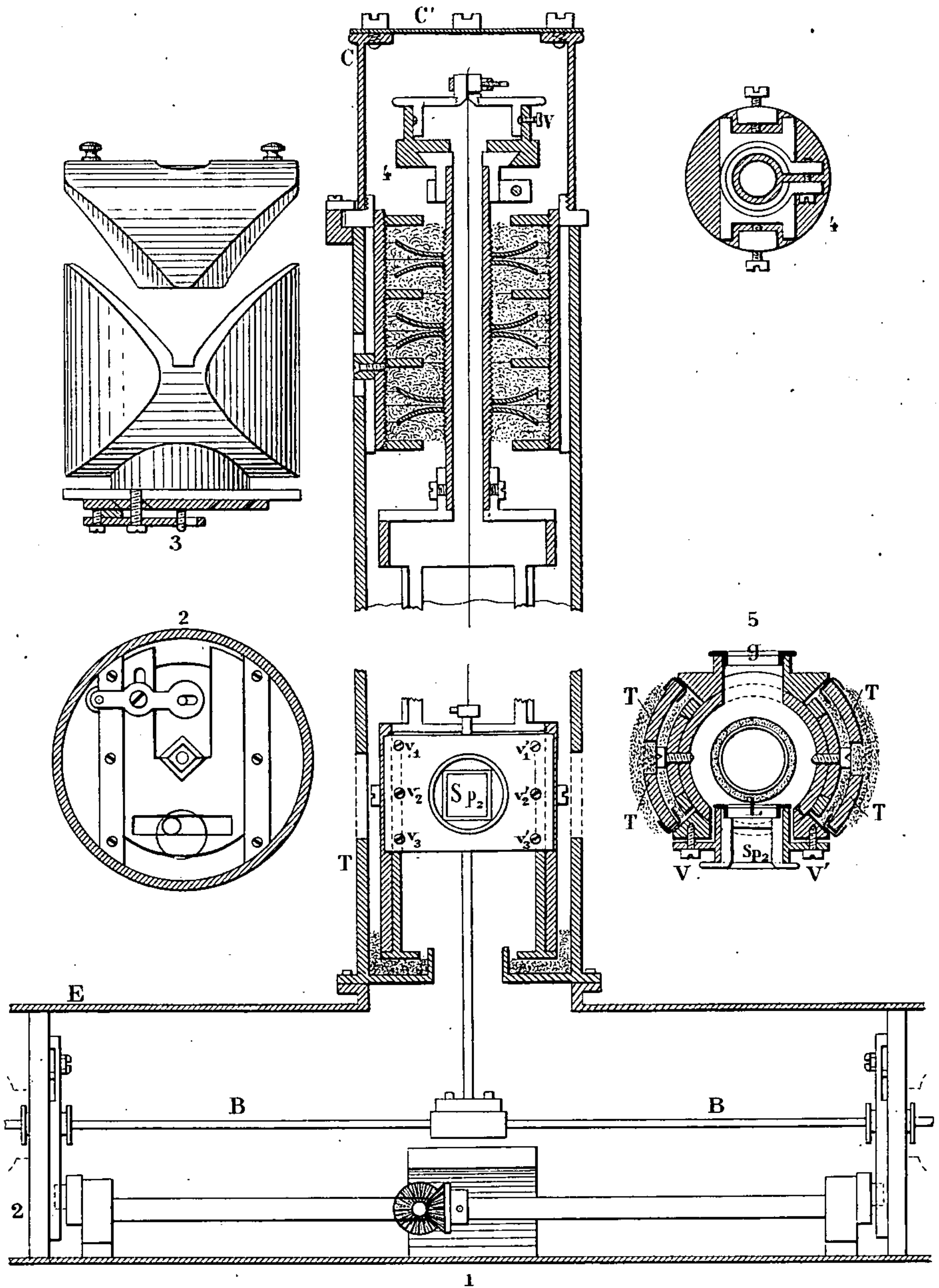
CIMENT.

Ciment Sud.....	2,20	2,26
Ciment Nord.....	2,16	2,16

ROCHES.

	DENSITÉ.	
	ROCHE SÈCHE.	ROCHE HUMIDE.
Ch. II.....	2,760	2,760
Ch. V.....	2,707	2,701
Ch. XII.....	2,777	2,769
Ch. XIII.....	2,773	2,767
Ch. XVI ₁	2,699	2,722
Ch. XVI ₂	2,703	2,692

Echelle $\frac{1}{2}$

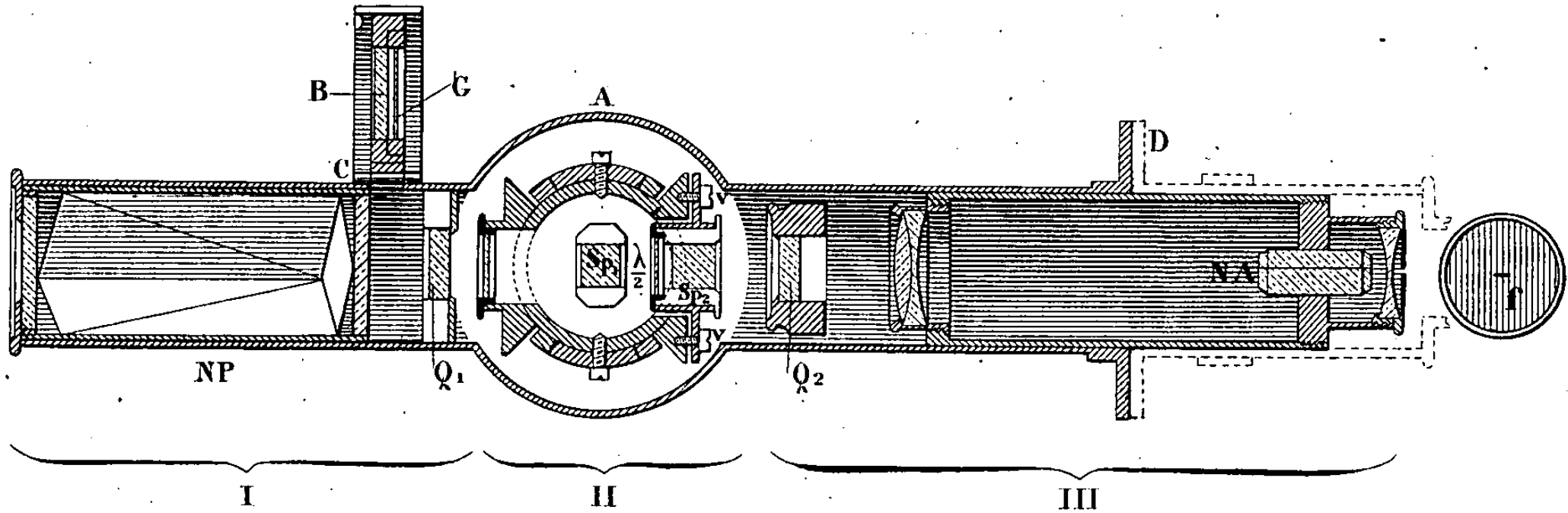
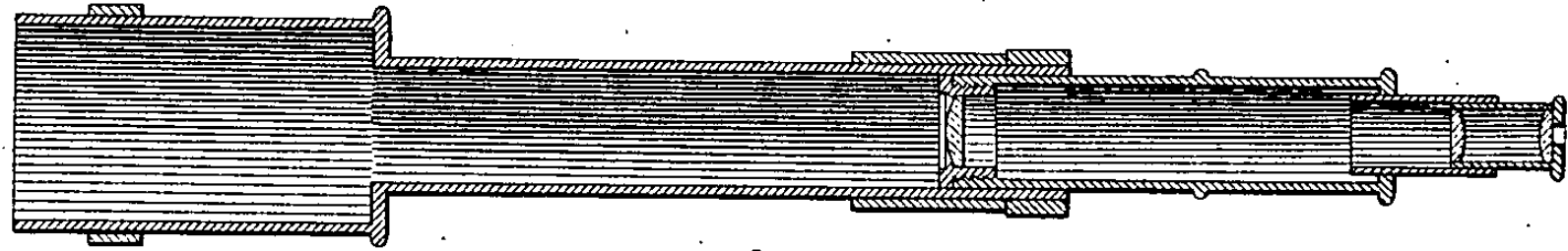
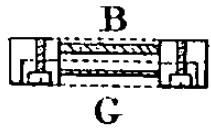
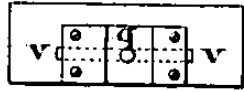
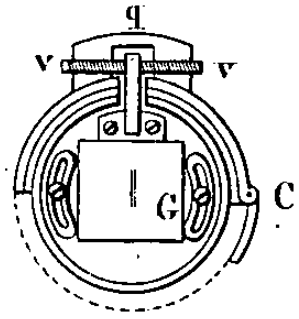


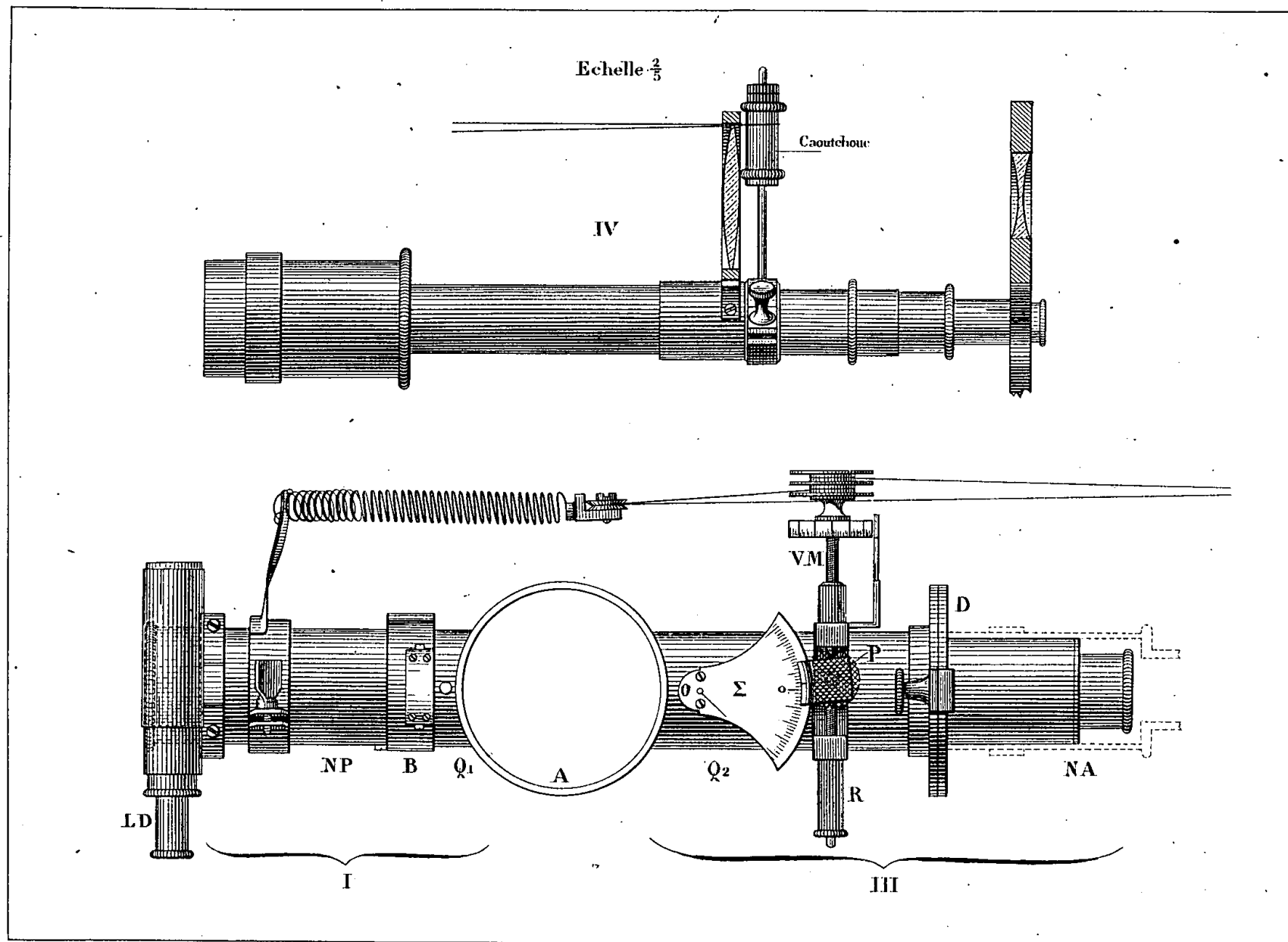
Echelle $\frac{2}{5}$

IV

2

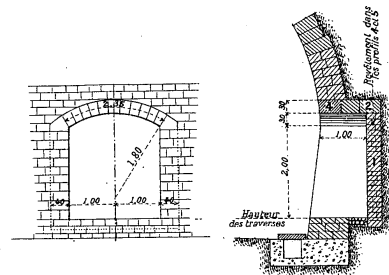
3



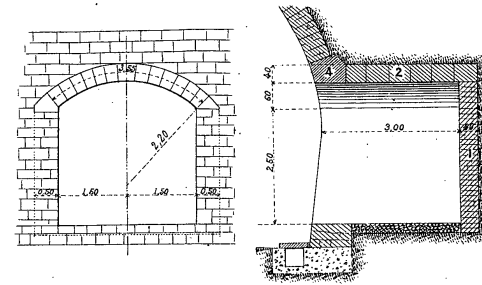


Pl. III.

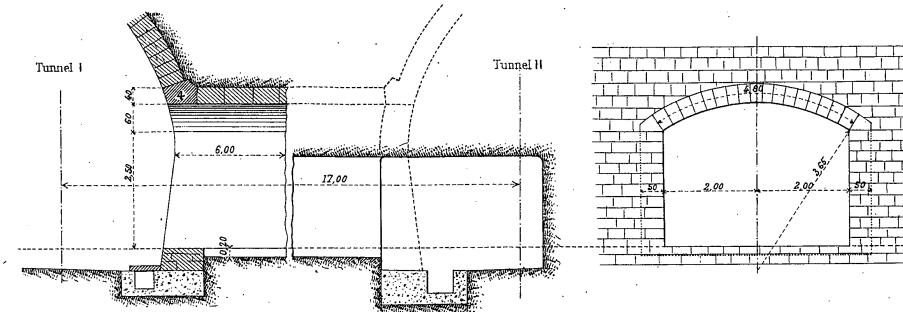
Niche
tous les 100 mètres



Petite chambre
tous les kilomètres

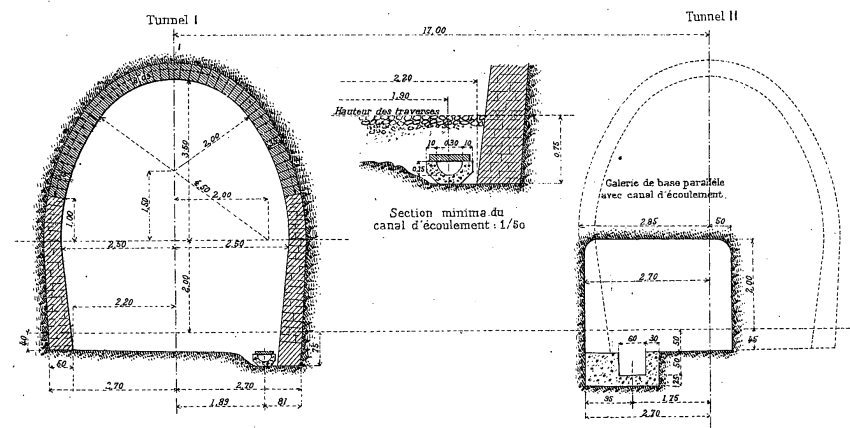


Grande chambre
tous les 4 ou 5 kilomètres



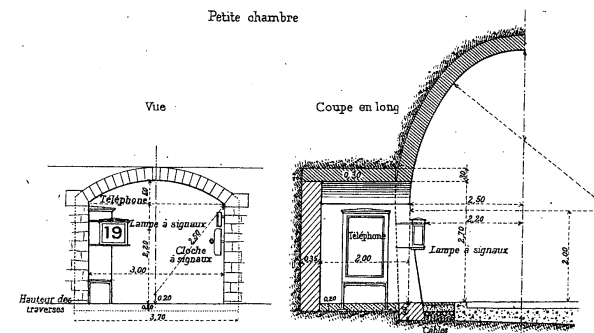
Nota : La maçonnerie des piliers et de la voûte des petites et grandes chambres est du même genre que celle des piliers et de la voûte du profil-type dans lequel elles seront construites.
La maçonnerie de la voûte de face est en pierres de taille.

Profil 1 (sans revêtement)
Profil 2 (avec revêtement)

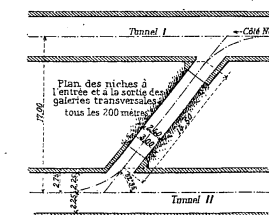


Installations électriques dans le tunnel

Petite chambre



Galeries transversales



N.B. - La coupe géologique est une interprétation des observations faites le long du tunnel, et à la surface, précisée par l'étude du débit et de l'origine des sources: elle ne peut donner qu'une idée assez indécise de la distribution réelle des densités. (M. Be.)

PROFIL GÉOLOGIQUE DU MASSIF DU SIMPLON

SUIVANT L'AXE DU GRAND TUNNEL

Echelle 1:50.000

Le long de l'axe du tunnel les points marqués en chiffres romains (—IV—) et régulièrement espacés indiquent les emplacements des chambres; les points marqués en chiffres arabes (—X—) indiquent les emplacements où ont été pris les échantillons de roches dont les densités, inscrites au dessous de la coupe, m'ont été communiquées par la Direction des Chemins de fer fédéraux.

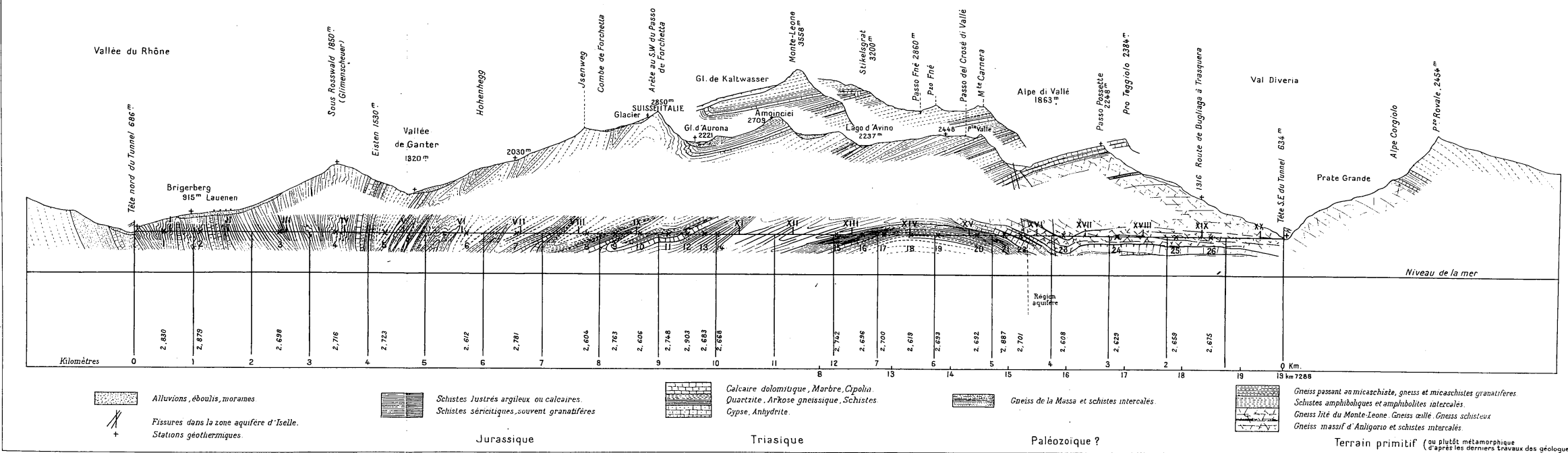


TABLE DES MATIÈRES.

	Pages.
INTRODUCTION.....	1
CHAPITRE I. Méthodes et appareils de M. Eötvös.....	5
— II. Appareils nouveaux.....	15
— III. Description détaillée de l'appareil (Pl. I).....	28
— IV. Oscillations de balancier.....	45
A. Mise en liberté du balancier.....	45
B. Amortissement.....	48
C. Variations de température.....	53
— V. Mesure des petits angles.....	57
A. Principe de la mesure des petits angles.....	57
B. Théorie des franges employées à la mesure des petits angles.....	62
C. Frange achromatique.....	75
— VI. Description détaillée de la partie optique (Pl. II et III).....	81
Réglage optique.....	86
— VII. Étalonnage théorique.....	94
A. Source monochromatique.....	94
B. Source blanche.....	108
— VIII. Magnétisme du balancier.....	115
— IX. Le tunnel du Simplon.....	119
— X. Marche des observations. — Organisation. — Incidents.....	135
— XI. Résultats des observations. — Le géoïde tel qu'il est dans le tunnel.....	147
Tableaux.....	167, 170, 171

CHAPITRE XII. Actions locales du tunnel et des chambres	173
A. Méthodes de calcul	173
B. Résultats	188
Ellipticité due aux actions locales	206
Résultats définitifs	217
Tableaux	216, 217, 220, 221, 222
APPENDICE	226

Planches I, II, III. — Appareil.

Planche IV. — Gabarits de construction du tunnel.

Planche V. — Coupe géologique.